

Kapitola 1

Základní vlastnosti množiny \mathbb{R}

Úmluva 1. \mathbb{R} doplníme o další dva prvky $\{+\infty, -\infty\}$ a vzniklou množinu označíme \mathbb{R}^* . Rozšíříme na ni uspořádání a základní početní úkony (vzájemné sčítání, násobení, odčítání, dělení) takto:

1. $-\infty < x < \infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

2.

$$\begin{aligned}x + \infty &= \infty, & x + (-\infty) &= -\infty & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \\x \cdot (\infty) &= \infty, & x \cdot (-\infty) &= -\infty & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \\x \cdot (\infty) &= -\infty, & x \cdot (-\infty) &= \infty & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \\ \infty \cdot (-\infty) &= -\infty, & \frac{x}{\infty} &= \frac{x}{-\infty} = 0 & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\infty + (-\infty), \infty \cdot 0, -\infty \cdot 0, \frac{\pm\infty}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se nezavádí.

Definice 2. Množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazveme zdola (shora) omezenou, jestli je takové $K \in \mathbb{R}$, že $K \leq x \forall x \in M$ ($K \geq x \forall x \in M$). Pak řekneme, že K omezuje M zdola (shora). K se taky říká dolní (horní) odhad, mez, hranice, omezení, závora množiny M .

Je-li M omezená shora i zdola, říkáme jí omezená.

Definice 3. Největším prvkem množiny M nazveme takové n , kde $x \leq n \forall x \in M$. Značíme $\max M$. Obdobně se zavádí $\min M$ – nejmenší prvek M .

Poznámka 4. $\max(0, 1) = 1$, $\max(0, 1)$ nemá největší prvek. Má-li $M \subset \mathbb{R}$ nejmenší, případně největší prvek, je shora, příp. zdola omezená a sice číslem $\max M$, případně $\min M$.

Základní vlastnost množiny \mathbb{R} vyjadřuje následující věta:

Věta 5 (O suprému). *Bud' $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M shora omezená. Pak je jediné číslo s takové, že platí*

1. $x \leq s$ pro $\forall x \in M$ (s omezuje M shora)
2. $\forall s' < s \exists x \in M$, že $s' < x$ (s je nejmenší horní mez)

Důkaz. Jedná se pouze o důkaz jednoznačnosti. Má-li s vlastnosti 1 a 2, pak je-li $t < s$, t nemá vlastnost 1 (podle 2) a je-li $t > s$, nemá vlastnost 2. Tedy číslo s s oběma vlastnostmi 1 a 2 je nejvýše jedno. \square

Důsledek 6 (věta o infímu). Je-li $\emptyset \neq M \in \mathbb{R}$ zdola omezená, pak existuje jediné číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že:

1. $x \geq d$ pro $\forall x \in M$ (d omezuje M zdola)
2. $\forall d' > d \exists x \in M$, že $d' < x$ (d je největší dolní mez)

Důkaz. Dokážeme úplnou větu, za předpokladu, že víme, že platí věta o suprém.

Množina $-M = \{-x | x \in M\}$ je shora omezená a podle věty 5 je $s \in \mathbb{R}$, že

$$\tilde{1} \quad y \leq s \text{ pro } \forall y \in -M$$

$$\tilde{2} \quad \forall d' > d \exists x \in -M : x < d'$$

Ukážeme, že číslo $-s$ má vlastnosti 1 a 2 (z důsledku věty 5).

Je-li $d' > -s$, je $-d' < s$ a podle $\tilde{2}$ je $y \in -M$, že $y > -d'$. Je však $y = -x$ pro nějaké $x \in M$ a tak $-x > -d'$, odkud $x < d'$, což je vlastnost 2 čísla $-s$ vůči M , o které předpokládáme, že platí.

Tím se dokázalo, že pokud platí věta o suprém, platí i věta o infím. Důkaz jednoznačnosti je podobný jako u věty o suprém. \square

Definice 7. Číslo s z věty 5 a číslo d z důsledku věty 5 se říká suprémum (infímum) množiny M a značí se $\sup M$ ($\inf M$).

Položíme ještě $\sup M = \infty$ ($\inf M = -\infty$), není-li M shora (zdola) omezená.

Dále $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = \infty$ a $\emptyset = M$ je jediný případ, kdy $\inf M > \sup M$.

Poznámka 8. Každá $M \subset \mathbb{R}^*$ má tedy definovanou hodnotu $\sup M$, $\inf M$. Je-li množina neprázdná, shora (zdola) omezená, je $\sup M \in \mathbb{R}$ ($\inf M \in \mathbb{R}$).

Každá shora (zdola) omezená neprázdna podmnožina \mathbb{R} tam tedy má své suprémum (infímum). To ale neplatí v \mathbb{Q} . Například množina $M = \mathbb{Q} \cap (0, \pi)$ má $\sup M \notin \mathbb{Q}$.

Má-li M největší (nejmenší) prvek, je tento zároveň suprémem (infímem) množiny M . Je $\sup M \in M \Leftrightarrow M$ má největší prvek. Je-li to tak, je $\sup M = \max M$. Obdobně to platí o infímu a nejmenším prvku.

Důkaz důsledku věty 5 ukazuje, že $\inf M = -\sup -M$, obdobně $\sup M = -\inf -M$.

Kapitola 2

Limity posloupností

Definice 9. Zobrazení $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) nazveme posloupností reálných (komplexních čísel). Místo $a(n)$ značíme a_n .

Definice 10. Číslo $a \in \mathbb{C}$ nazveme limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$$

píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($\lim a_n = a$, $a_n \rightarrow a$) a říkáme, že $\{a_n\}$ má (konečnou) limitu, konverguje k a .

Posloupnostem, které mají konečnou limitu, se říká konvergentní.

Jestli pro reálnou posloupnost platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists k(K) \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n > K \quad \forall n \geq k$$

píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ($\lim a_n = \infty$, $a_n \rightarrow \infty$) a říkáme, že $\{a_n\}$ jde k nekonečnu; diverguje.

Obdobně, jestli pro reálnou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists k(K) \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n < K \quad \forall n \geq k$$

píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ($\lim a_n = -\infty$, $a_n \rightarrow -\infty$) a říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje k $-\infty$.

Poznámka 11. Platí-li některá z podmínek v definici 10 pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak platí pro všechna $\varepsilon' > \varepsilon$.

Vlastnosti posloupností

Věta 12. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Jestli $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$, pak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$$

takže to platí i pro $\varepsilon = 1$, tj. $\exists k \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq k$. Neboli $|a| - 1 < |a_n| < |a| + 1 \quad \forall n \geq k$. Je tedy $|a_n|$ omezená zdola (shora) číslem $|a| - 1$ ($|a| + 1$) od nějakého konečného indexu k dál $\forall n \geq k$. Načež je $|a_n|$ zdola (shora) omezená číslem $\min(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k-1}|, |a| - 1)$ ($\max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k-1}|, |a| + 1)$) $\forall n \in \mathbb{N}$. \square

Věta 13. Posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Nechť $a_n \rightarrow a$, $a_n \rightarrow b$ a buďte třeba $a, b \in \mathbb{C}$.

Protože $a_n \rightarrow a$, platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k' \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq k'$$

protože $a_n \rightarrow b$, platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{k} \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{k}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq k$: $\max(k'(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon))$, pak je $|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon$ (ty absolutní hodnoty jsou obě $< \varepsilon$).

Je tedy $|a - b| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, nezbyvá tedy, než že $|b - a| = 0$, tj. $a = b$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, je $\{a_n\}$ podle věty 12 omezená, ale $a_n \rightarrow b = \infty$ dává neomezenost $\{a_n\}$, což je spor.

Jestli $a = \infty$, $b = -\infty$, pak $a_n \rightarrow \infty$ znamená, že

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists k' \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n > K \quad \forall n \geq k'(K) \quad (2.1)$$

a $a_n \rightarrow -\infty$ znamená, že

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists \tilde{k} \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n < K \quad \forall n \geq \tilde{k}(K) \quad (2.2)$$

takže, zvolíme-li $K = 0$ v (2.1) a (2.2) máme pro $n \geq k = \max(k'(0), \tilde{k}(0))$: $a_n > 0$ podle (2.1), ale $a_n < 0$ podle (2.2). \square

Věta 14 (Vztah limit posloupností a základních početních úkonů). *Nechť $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, pak*

1. $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$
2. $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ (nelze $0 \cdot \infty$)
3. $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$ nebo zlomek $\frac{a}{b}$ není ve tvaru $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

má-li pravá strana smysl, tj. například má-li $\frac{a}{b}$ smysl, má posloupnost $\frac{a_n}{b_n}$ limitu a ta se rovná $\frac{a}{b}$; obdobně ostatní případy.

Důkaz. 1. Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, takže

$$\forall \sigma > 0 \exists k'(\sigma), \text{ že } |a_n - a| < \sigma \quad \forall n \geq k' \quad (2.3)$$

$$\forall \sigma > 0 \exists \tilde{k}(\sigma), \text{ že } |b_n - b| < \sigma \quad \forall n \geq \tilde{k} \quad (2.4)$$

Abychom ukázali, že $a_n + b_n \rightarrow a + b$, máme ukázat, že platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon), \text{ že } |a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$$

Bud' tedy $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq k = \max(k'(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon))$, pak je $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

2. Podle věty 12 je $\{a_n\}$ omezená. Bud' $K > 0$ nějaká konstanta, jež ji omezuje ($|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$). Pak je $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \leq K \cdot \varepsilon + |b| \cdot \varepsilon = (K + |b|) \cdot \varepsilon$.

3. Bud' te $K > 0$, $L > 0$ nějaké konstanty, které omezují $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ podle věty 12. Pak je $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{a_n b - a_n b_n + a_n b_n - a b_n}{b_n b} \right| \leq \frac{|a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b_n|}{|b_n b|} < \frac{(K+L)}{|b|} \cdot \frac{1}{|b_n|} \cdot \varepsilon$.

Ted' potřebujeme dokázat, že $\frac{1}{|b_n|}$ je omezené.

Protože $\frac{a}{b}$ má smysl, je $b \neq 0 \Rightarrow |b| \neq 0$, načež $||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \varepsilon$ takže $|b_n| \geq |b| - \varepsilon$. Je-li $|b| - \varepsilon > 0$, tj. $\varepsilon < |b|$, je $\frac{1}{|b| - \varepsilon} > 0$ a tak

$$\frac{(K+L) \cdot \varepsilon}{|b|} \cdot \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{(K+L) \cdot \varepsilon}{|b|} \cdot \frac{1}{|b| - \varepsilon}$$

Je-li dokonce $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$, je $\frac{1}{|b|-\varepsilon} < \frac{1}{|b|-\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|}$ a tak je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{(K+L) \cdot \varepsilon}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|}$$

a podle poznámky 11 je důkaz hotový. \square

Věta 15 (2. věta o limitě součinu). *Bud' $\{a_n\}$ omezená, $\{b_n\} \rightarrow 0$. Pak má $\{a_n \cdot b_n\}$ limitu a ta se rovná nule.*

Důkaz. $\exists k > 0$, že $|a_n| < K$ (omezenost $\{a_n\}$, definice 2). To, že $b_n \rightarrow 0$, znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ a že } |b_n| < \varepsilon \forall n \geq k$$

Pro $n \geq k(\frac{\varepsilon}{K})$ pak je $|a_n b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. \square

Věta 16 (2. věta o limitě převrácené hodnoty). *Nechť $a_n \rightarrow 0$ a $\exists \tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $a_n > 0$ ($a_n < 0$) $\forall n \geq \tilde{k}$. Pak $\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$ ($-\infty$).*

Důkaz. Bud' $a_n > 0 \forall n \geq \tilde{k}$ a bud' $K > 0$. Ježto $a_n \rightarrow 0$, číslo $\frac{1}{K}$, $k' \in \mathbb{N}$, že $|a_n| < \varepsilon = \frac{1}{K} \forall n \geq k'$, takže $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > K$ pro tato n .

Je-li $a_n < 0 \forall n \geq \tilde{k}$, je $b_n = -a_n > 0 \forall n \geq \tilde{k}$ a podle právě dokázaného je $\frac{1}{b_n} \rightarrow \infty$, odkud $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{-b_n} = -\frac{1}{b_n} \rightarrow -\infty$. \square

Věta 17 (O přenášení nerovnosti z limit na posloupnosti). *Nechť $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ a $a < b$. Pak $\exists k \in \mathbb{N}$, že $a_n < b_n \forall n \geq k$.*

Důkaz. Bud' třeba $a, b \in \mathbb{R}$. Platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq k' \quad (2.5)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |b_n - b| < \varepsilon \forall n \geq \tilde{k} \quad (2.6)$$

Pro $n \geq k = \max\left(k'(\frac{b-a}{2}), \tilde{k}(\frac{b-a}{2})\right)$ je podle (2.5)

$$a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

a podle (2.6) je

$$b_n > b + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

dohromady $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, platí (2.5) a $\forall K \in \mathbb{R} \exists \tilde{k}(K)$, že $b_n > K \forall n \geq \tilde{k}$.

Pro $n \geq k = \max\left(k'(1), \tilde{k}(a+1)\right)$ je $a_n < a+1 < b_n$. \square

Věta 18. *Nechť $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ a nechť $\exists k \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq b_n \forall n \geq k$. Pak $a \leq b$.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. $b < a$, existuje podle věty 17 index $k' \in \mathbb{N}$, že $b_n < a_n$ pro každé $n \geq k'$.

Pro $n \geq \max(k, k')$ je tedy $b_n < a_n$ a $a_n \leq b_n$ a to je spor. \square

Věta 19 (O majorizované konvergenci (o dvou policajtech)). *Nechť $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$ a existuje $k^* \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \geq k^*$. Pak $\{c_n\}$ má limitu a ta se rovná a .*

Důkaz. Bud' třeba $a \in \mathbb{R}$ máme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |c_n - a| < \varepsilon \forall n \geq k$$

Bud' tedy $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \rightarrow a$, existuje $k' \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq k'$ a tak $a - \varepsilon < a_n \forall n \geq k'$. Protože $b_n \rightarrow a$, existuje $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $|b_n - a| < \varepsilon \forall n \geq \tilde{k}$ a tak $b_n < a + \varepsilon \forall n \geq \tilde{k}$.

Pro $n \geq k = \max(k', \tilde{k})$ pak je $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$, tj. $|c_n - a| < \varepsilon$. \square

Definice 20. Řekněme, že reálná posloupnost $\{a_n\}$ roste (neklesá, klesá, neroste), jestli $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řekněme, že $\{a_n\}$ má některou z (těchto) vlastností od $k \in \mathbb{N}$, má-li ji $\forall n \geq k$.

Posloupnostem, které neklesají či nerostou se říká monotónní, těm co dokonce jenom rostou či klesají, se říká ryze monotónní.

Věta 21 (O existenci limity monotónní posloupnosti). Jestli $\{a_n\}$ neklesá (neroste), má limitu. Ta se rovná $\sup \{a_n\}$ ($\inf \{a_n\}$).

Důkaz. Necht' $\{a_n\}$ třeba neklesá. Je-li $a = \sup \{a_n\} \in \mathbb{R}$, zvolme $\varepsilon > 0$. Je $a - \varepsilon < a$ a podle podle 2. vlastnosti suprému (věta 5) je nějaké $a_k > a - \varepsilon$.

Pro $n \geq k$ pak je $a - \varepsilon < a_k \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, tedy $|a_n - a| < \varepsilon$ pro tato n . Je-li $\sup \{a_n\} = \infty$, není posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená, a tak $\forall K \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{N}$, že $a_k > K$ (definice 2). Ale $\{a_n\}$ neklesá a tak $a_n \geq a_k > K \forall n \geq k$.

Jestli $\{a_n\}$ neroste, tak $\{-a_n\}$ neklesá a tak $-a_n \rightarrow \sup \{-a_n\} = -\inf \{a_n\} \Rightarrow a_n \rightarrow \inf \{a_n\}$. \square

Definice 22. Vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$ je posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Říká se jí též podposloupnost.

Věta 23 (O limitě vybrané posloupnosti). Necht' $a_n \rightarrow a$ a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je z ní vybraná. Pak má limitu a ta se rovná a .

Důkaz. Necht' $a \in \mathbb{R}$. Bud' $\varepsilon > 0$. Pak $\exists t \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq t$. Bud' $s \in \mathbb{N}$ taková, že $n_s > t$ (takové s existuje, neboť $\{n_k\}$ roste). Pro $k \geq s$ pak je $n_k \geq n_s \geq t$. Takže $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Necht' $a = \infty$. Bud' $K \in \mathbb{R}$. Pak $\exists t \in \mathbb{R}$, že $a_n > K \forall n \geq t$. Opět existuje $s \in \mathbb{N}$, že $n_s \geq t$. Pro $k \geq s$ pak je $n_k \geq n_s \geq t$ a tak $a_{n_k} > K$.

Jestli $a_n \rightarrow -\infty$, tak $-a_n \rightarrow \infty \Rightarrow -a_{n_k} \rightarrow \infty \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow -\infty$. \square

Důsledek 24. Obsahuje-li $\{a_n\}$ dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, nemá limitu.

Věta 25. Bud' $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ vybrané z $\{a_n\}$, přičemž $\forall n \in \mathbb{N}$ je jedním z m_k nebo n_l (tj. $\{m_l\} \cup \{n_l\} = \mathbb{N}$).

Jestli $a_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$, $a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a$, tak má $\{a_n\}$ limitu a ta se rovná a .

Důkaz. Bud' $a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists \tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $|a_{m_k} - a| < \varepsilon \forall k \geq \tilde{k}$. $\exists \tilde{l} \in \mathbb{N}$, že $|a_{n_l} - a| < \varepsilon \forall l \geq \tilde{l}$. Tudíž pro $n \geq \max(m_{\tilde{k}}, n_{\tilde{l}})$ je buďto $n = m_k$ a protože je $n \geq m_{\tilde{k}}$, odkud $k \geq \tilde{k}$, takže $|a_n - a| = |a_{m_k} - a| < \varepsilon$ odkud plyne $l \geq \tilde{l}$, takže $|a_n - a| = |a_{n_l} - a| < \varepsilon$. \square

Definice 26. Hromadnou hodnotou (hromadným bodem) posloupnosti $\{a_n\}$ nazveme limitu její vybrané posloupnosti.

Věta 27. Množina všech hromadných hodnot každé reálné posloupnosti $\{a_n\}$ je neprázdná, má největší prvek s a nejmenší d . Přitom je $s = \lim s_n$ a $d = \lim d_n$ kde $s_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $d_n = \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$.

Důkaz. 1. Posloupnost $\{s_n\}$ ($\{d_n\}$) neroste (neklesá) a tak má podle věty 21 limitu. Označme ji s (d).

2. Dokážeme, že s je hromadným bodem $\{a_n\}$ (tj. limitou nějaké posloupnosti) takto:

Podle věty 21 je $s = \inf \{s_n\}$ a buď $s \neq \infty$; to je pak $s_n \neq \infty \forall n$. Pak je

- (a) $s_n - 1 < s_1 = \sup \{a_1, a_2, \dots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 \exists index $n_1 \in \mathbb{N}$, že $s - 1 < a_{n_1} \leq s_1$
- (b) $s_{n_1+1} - \frac{1}{2} < s_{n_1+1} = \sup \{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, že $s_{n_1+1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq s_{n_2}$
- (c) $s_{n_2+1} - \frac{1}{3} < s_{n_2+1} = \sup \{a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \dots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists n_3 \in \mathbb{N}$, že $s_{n_2+1} - \frac{1}{3} < a_{n_3} \leq s_{n_3}$
- \vdots

Mějme už $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots < n_k$, že

$$s_{n_j+1} - \frac{1}{j+1} < a_{n_j} \leq s_{n_j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k (k \geq 1) \quad (2.7)$$

Je $s_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} < s_{n_k+1} = \sup \{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists n_{k+1} \in \mathbb{N}$, že $s_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq s_{n_{k+1}}$.

Tím se dostane rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, takže $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je z $\{a_n\}$ vybraná a že (2.7) platí pro $\forall j \in \mathbb{N}$.

Protože je s_{n_j+1} z $\{s_n\}$ vybraná, jde podle věty 18 a 14 levá i pravá strana v (2.7) k s a podle věty 19 je $a_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} s$.

Je-li $s = \infty$, pak z toho, že $s = \inf \{s_n\}$ plyne, že $s_n = \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

- (a) $1 < s_1 = \sup \{a_1, a_2, \dots\}$, takže podle věty 5 je index $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} > 1$,
- (b) $2 < s_{n_1+1} = \sup \{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}$, takže podle věty 5 je index $n_2 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_2} > 2$,
- (c) $3 < s_{n_2+1} = \sup \{a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \dots\}$, takže podle věty 5 je index $n_3 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_3} > 3$,
- \vdots

Vzniklá vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, kde $k < a_{n_k} \forall k \in \mathbb{N}$ a podle věty 19 je $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, tj. $a_{n_k} \rightarrow s$.

3. s je největší hromadný bod $\{a_n\}$.

Je-li h hromadný bod $\{a_n\}$, je limitou z ní vybrané posloupnosti, již označíme $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Pak je $a_{n_k} \leq \sup \{a_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots\} = s_{n_k}$, $h = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s$. □

Definice 28. Největší (nejmenší) hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá její horní limitou nebo také *limes superior* (dolní limitou nebo také *limes inferior*) a značí se $\overline{\lim} a_n$ nebo $\limsup a_n$ ($\underline{\lim} a_n$ nebo $\liminf a_n$).

Věta 29. $\{a_n\}$ má limitu právě když $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$. Ta je pak rovna jejich společné hodnotě.

Důkaz. \Rightarrow Existuje-li $\lim a_n$, má podle věty 23 každá z $\{a_n\}$ vybraná posloupnost limitu a rovnou $\lim a_n$. Protože $\overline{\lim} a_n$ i $\underline{\lim} a_n$ jsou limitami vybraných posloupností, platí to i pro ně. Takže jsou stejné a rovné limitě a_n .

\Leftarrow Jelikož $d_n = \inf \{a_n, \dots\} \leq \{a_n\} \leq \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = s_n$ a $d = \lim d_n = \underline{\lim} a_n$, $s = \lim s_n = \overline{\lim} a_n$, je $d_n \leq a_n \leq s_n$ a tak má $\{a_n\}$ limitu rovnou společné hodnotě limit $\lim s_n$, $\lim d_n$. □

Věta 30. Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní.

Důkaz. Bud' $\{a_n\}$ omezená a nechť je nejdřív reálná. Pak existuje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, že $a \leq a_n \leq b \forall n \in \mathbb{N}$. Rozdělme $\langle a, b \rangle$ jeho středem s_1 ; je-li $a_n \in \langle a, s_1 \rangle$ pro nekonečně indexů n , bud' n_1 jeden z nich a položme $p_1 = a$, $q_1 = s_1$. Jinak musí být $a_n \in \langle s_1, b \rangle$ pro nekonečně indexů n . Bud' n_1 jeden z nich a položme $p_1 = s_1$, $q_1 = b$.

V obou případech je $a \leq p_1 \leq a_{n_1} \leq q_1 \leq b$.

Rozdělme $\langle p_1, q_1 \rangle$ jeho středem s_2 ; bud' je $a_n \in \langle p_1, s_2 \rangle$ pro nekonečně indexů n , bud' $n_2 > n_1$ jeden z nich a položme $p_2 = p_1$, $q_2 = s_2$. Nebo je $a_n \in \langle s_2, q_1 \rangle$ pro nekonečně indexů n . Bud' $n_2 > n_1$ jeden z nich a položme $p_2 = s_2$, $q_2 = q_1$. Je $a \leq p_1 \leq p_2 \leq a_{n_2} \leq q_2 \leq q_1 \leq b$.

Vznikne tak posloupnost $\underbrace{\{p_k\}}_{\text{neklesá}}, \{a_{n_k}\}, \underbrace{\{q_k\}}_{\text{neroste}}$ a $a \leq p_k \leq a_{n_k} \leq q_k \leq b \forall k \in \mathbb{N}$. Je

$$|p_k - q_k| = \frac{b - a}{2^k}$$

Podle věty 21 má $\{p_k\}, \{q_k\}$ limitu $p_k \rightarrow p, q_k \rightarrow q$. Ježto $0 \leq |p_k - q_k| = \frac{b-a}{2^k}$, je $|p - q| = \lim |p_k - q_k| = \lim \frac{b-a}{2^k} = 0 \Rightarrow p = q$. Podle věty 19 má limitu i $\{a_{n_k}\}$ rovnou $p = q$ díky nerovnosti $a \leq a_{n_k} \leq b$ konečnou. \square

Věta 31 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence). *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní (tj. konečnou) limitu právě když splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_m - a_n| < \varepsilon \forall n, m \geq k(\varepsilon) \quad (2.8)$$

Důkaz.

\Rightarrow $\{a_n\}$ měj konečnou limitu, označme ji $a \in \mathbb{C}$. Bud' $\varepsilon > 0$. Pak existuje $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq k$, takže pro $m, n \geq k$ je $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq 2\varepsilon$, což je (2.8).

\Leftarrow Ukážeme nejdřív, že splňuje-li a_n podmínku (2.8), je omezená. Nechť tedy platí (2.8). Zvolíme-li tam třeba $\varepsilon = 1$, pak tedy existuje index $k(1) \in \mathbb{N}$, že $|a_m - a_n| < 1 \forall m, n \geq k(1)$. To tudíž platí i pro $n = k(1)$, takže $|a_m - a_{k(1)}| < 1 \forall m \geq k(1)$. To je $a_{k(1)} - 1 < a_m < a_{k(1)} + 1 \forall m \geq k(1)$. Je tedy $\{a_n\}$ omezená shora (zdola) číslem $a_{k(1)} + 1$ ($a_{k(1)} - 1$) od $n = k(1)$, je tedy omezená.

Podle věty 30 existuje $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}$, která konverguje, její limitu označme a . Ukážeme, že $a_n \rightarrow a$. Bud' $\varepsilon > 0$, podle (2.8) existuje $\tilde{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \forall m, n \geq \tilde{k}(\varepsilon) \quad (2.9)$$

Protože $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$, je $k'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \forall k \geq k'(\varepsilon)^1 \quad (2.10)$$

Pro $n \geq n_{k'(\varepsilon)}$, pak je (protože $n_{k'} \geq k' \geq \tilde{k}$) $|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_{k'}}|}_{< \varepsilon \text{ podle (2.9)}} + \underbrace{|a_{n_{k'}} - a|}_{< \varepsilon \text{ podle (2.10)}} < 2\varepsilon$

\square

Věta 32 (Stolzova). *Nechť $\{y_n\}$ roste a $y_n \rightarrow \infty$. Pak existuje-li $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, existuje i $\lim \frac{x_n}{y_n}$ a jsou stejné.*

Důkaz. 1. Jsou-li zlomky $\frac{p_1}{q_1}$ a $\frac{p_2}{q_2}$ mezi reálnými čísly a a b , $a < b$ ($a < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < b$) a je-li $q_1 > 0, q_2 > 0$, je $a < \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$.

Skutečně, je-li $a < \frac{p_1}{q_1} < b$, $a < \frac{p_2}{q_2} < b$, $q_1 > 0, q_2 > 0$, je $a q_1 < p_1 < b q_1$, $a q_2 < p_2 < b q_2$, takže $a(q_1 + q_2) < p_1 + p_2 < b(q_1 + q_2)$, odkud už přímo dostaneme $a < \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} < b$.

¹lze vzít $k'(\varepsilon) \geq \tilde{k}(\varepsilon)$

2. Nechť existuje $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ a buď nejdřív l konečné. Pak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } \left| \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} - l \right| < \varepsilon \quad \forall n > k' \quad (2.11)$$

Skutečně, buď $\varepsilon > 0$. Existence a konečnost l zaručuje, že

$$\exists k' \in \mathbb{N}, \text{ že } \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \right| < \varepsilon \quad \forall n > k' \quad (2.12)$$

tj. $l - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \varepsilon \quad \forall n \geq k'$. Je ale

$$\frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} = \frac{x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \cdots + x_{k'+1} - x_{k'}}{y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + y_{n-2} - \cdots + y_{k'+1} - y_{k'}}$$

a protože $y_j - y_{j-1} > 0 \quad \forall j \geq k'$, plyne (2.11) z (2.12) podle bodu 1.

3. Je $\frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} = \frac{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{k'}}{y_{k'}}}{1 - \frac{y_{k'}}{y_n}}$ což umožňuje vyjádřit $\frac{x_n}{y_n}$ pomocí

$$\frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} : \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \cdot \left(1 - \frac{y_{k'}}{y_n} \right) + \frac{y_{k'}}{y_n}$$

a tak

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} - l - \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \cdot \frac{y_{k'}}{y_n} + \frac{x_{k'}}{y_n}$$

načež

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \left| \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} - l \right| + \left| \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \right| \cdot \frac{y_{k'}}{y_n} + \frac{|x_{k'}|}{y_n} \quad \text{pro } n > k' \quad (2.13)$$

4. Buď $\varepsilon > 0$. Podle (2.11) je posloupnost $\left\{ \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \right\} \quad n > k'$ omezená (omezující konstantu označme K a buď $K > 0$).

Protože $y_n \rightarrow \infty$, existuje $\tilde{k}(\varepsilon)$, že

$$\frac{y_{k'}}{y_n} < \varepsilon, \quad \frac{x_{k'}}{x_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{k}(\varepsilon) \quad (2.14)$$

Pro $n \geq k = \max(k'(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon))$ je pak podle (2.11), (2.12), (2.13) a (2.14)

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \varepsilon + K \cdot \varepsilon + \varepsilon = (2 + K) \cdot \varepsilon$$

Čímž máme důkaz pro $l \neq \infty$ hotov.

Pokud máme $l = \infty$, pak ke $K = 1$ existuje $k \in \mathbb{N}$, že

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \quad \forall n \geq k$$

odkud $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \quad \forall n \geq k$.

Takže jednak $x_n > x_{n-1} \quad \forall n \geq k$ a

$$\begin{aligned} x_n - x_k &= x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \cdots + x_{k+1} - x_k > \\ &> y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + y_{n-2} - \cdots + y_{k+1} - y_k = \\ &= y_n - y_k \quad \forall n \geq k \end{aligned}$$

a z toho plyne, že $x_n > y_n + x_k - y_k$ a protože $y_n \rightarrow \infty$, tak podle věty 19 $x_n \rightarrow \infty$ a navíc podle věty 17 $x_n > 0 \quad \forall n \geq k^* \in \mathbb{N}$.

Shrnutí: Je tedy $x_n > x_{n-1} \quad \forall n \geq k$ a $x_n \rightarrow \infty$, navíc $\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$ má konečnou limitu $\frac{1}{l} = \frac{1}{\infty} = 0$ a tak lze na posloupnost $\left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\}$ použít už dokázaného, což dává: $\left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\}$ má limitu a ta je rovna nule. Je však $\frac{y_n}{x_n} > 0 \quad \forall n \geq k^*$ a tak podle věty 16 má převrácená hodnota $\frac{x_n}{y_n}$ limitu ∞ . \square

Důsledek 33.

1. Jestli $a_n \rightarrow a$, pak $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ má limitu a ta se rovná a .
2. $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$

Důkaz.

1. Ve větě 32 položíme $x_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, $y_n = n$.
2. V předchozím bodě položíme $a_n = \sqrt[n]{n}$ a uijeme toho, že $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. To platí, protože $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \Rightarrow n = (1 + h_n)^n > 1 + \binom{n}{2} h_n^2 \Rightarrow \frac{n-1}{2} > h_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} > h_n^2 \Rightarrow h_n \rightarrow 0$ (věta 19).
3. Ve větě 32 položíme $x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$. Pak je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k + \dots \text{(bin. věta)}} = \frac{1}{k+1}$$

4.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \cdot (1^k + 2^k + \dots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k} \end{aligned}$$

Podle věty 32 to je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)n^k - n^{k+1} + (n-1)^{k+1}}{(k+1)(n^k - (n-1)^k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+1}{2}n^{k-1} + \dots}{(k+1) \cdot k \cdot n^{k-1} + \dots} = \frac{\binom{k+1}{2}}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$$

□

Kapitola 3

Ohleduplný úvod do základů teorie množin

Definice 34. Zobrazení f množiny A do množiny B nazveme prostým jestli platí: mají-li dva prvky z A stejný obraz, jsou totožné, tj. $x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (nebo $x, y \in A, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$).

Také se říká, že f zobrazuje A do B prostě.

Řekneme, že f zobrazuje A na B jestli $f(A) = \{f(x), x \in A\} = B$, tj. $\forall y \in B \exists x \in A$, že $f(x) = y$.

Důsledek 35. Jestli f zobrazuje prostě A na B , pak $\forall y \in B \exists! x \in A$, že $f(x) = y$. Lze tedy ke každému prvku z B jednoznačně přiřadit jeho vzor $x \in A$ (tj. takové $x \in A$, že $f(x) = y$). Vznikne tak zobrazení B na A (opět prosté), jež se označuje f^{-1} a říká se mu inverzní zobrazení k f . Je tedy $f^{-1} : B \rightarrow A$. Vztahy $y = f(x)$ a $x = f^{-1}(y)$ jsou pro $x \in A, y \in B$ rovnocenné.

Definice 36. Řekneme, že množiny A a B mají stejnou mohutnost, jestliže existuje prosté zobrazení A na B a B na A .

Definice 37. Množinu A nazveme spočetnou, existuje-li prosté zobrazení množiny \mathbb{N} na A . Tj. zobrazení $a : \mathbb{N} \rightarrow A$. Jinak řečeno, jestli lze A uspořádat do posloupnosti, nebo jestli A lze „očíslovat“, tj. jestli $A = \{a(1), a(2), \dots\}$.

Nazveme ji nejvýše spočetnou, je-li spočetná nebo konečná. (Někdy se spočetnou rozumí nejvýše spočetná)

Věta 38. Buď A_n spočetná $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetná (spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina)

Důkaz. Uspořádáme spočetné množiny A_1, A_2, \dots do posloupností

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, \dots\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Prosté zobrazení $b : \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ buď třeba takovéto: $b(1) = a_{11}, b(2) = a_{12}, b(3) = a_{21}, b(4) = a_{13}, b(5) = a_{22}, b(6) = a_{31}, b(7) = a_{14}, \dots$ dál od rohu. \square

Důsledek 39. Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n spočetné, je i $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ spočetná.

Důkaz. Je-li $n = 2$, $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$, je

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 &= \{[a_{11}, a_{21}], [a_{11}, a_{22}], [a_{11}, a_{23}], \dots\} \cup \\ &\cup \{[a_{12}, a_{21}], [a_{12}, a_{22}], [a_{12}, a_{23}], \dots\} \cup \\ &\cup \{[a_{13}, a_{21}], [a_{13}, a_{22}], [a_{13}, a_{23}], \dots\} \cup \\ &\cup \dots \end{aligned}$$

Je to $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{[a_{1i}, a_{21}], [a_{2i}, a_{22}], \dots\}$, což je spočetné sjednocení spočetných množin a podle věty 38 je tedy rovněž spočetné. \square

Důsledek 40 (věty 38). Množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel je spočetná.

Důkaz. $\mathbb{Q} \subset \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, obě množiny jsou spočetné a můžeme uplatnit důsledek 39. \square

Věta 41. Každá (nekonečná) část spočetné množiny je spočetná.

Důkaz. Je-li $B \subset A = \{a_1, a_2, \dots\}$, buď $f(1)$ první index pro který je $a_f(1) \in B$, $f(2)$ první index, pro který je $a_f(2) \in B - \{a_f(1)\}$, ... Máme-li už $a_f(k) \in B - \{a_f(1), a_f(2), \dots, a_f(k-1)\}$, $k \geq 2$, buď $f(k+1)$ nejmenší index, že $a_f(k+1) \in B - \{a_f(1), a_f(2), \dots, a_f(k)\}$ a tak f prostě zobrazuje \mathbb{N} na B . \square

Tvrzení 42. Množina všech posloupností z nul a jedniček není spočetná.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Označme tu množinu P a předpokládejme, že je spočetná. Tj. lze ji uspořádat do posloupnosti $\{p^1, p^2, \dots\}$. Je tedy

$$\begin{aligned} p^1 &= \{p_1^1, p_1^2, \dots\} \\ p^2 &= \{p_2^1, p_2^2, \dots\} \\ p^3 &= \{p_3^1, p_3^2, \dots\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Nyní vytvoříme posloupnost $q = \{q_1, q_2, \dots\}$, kde $q_j = 0$ jestli $p_j^j = 1$ a $q_j = 1$ jestli $q_j = 0$. Posloupnost q pak není žádná z p^1, p^2, \dots , co \square

Důsledek 43. \mathbb{R} není spočetná.

Důkaz. Buď P množina všech posloupností z nul a jedniček, každé $a = \{a_1, a_2, \dots\} \in P$ přiřadíme číslo $s(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$. Je $s(a) \in \langle 0, 1 \rangle$ a tak vzniká zobrazení $s : P \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$. To však není prosté: jsou-li $a = \{a_1, a_2, \dots\}$, $b = \{b_1, b_2, \dots\} \in P$ takové, že pro nějaké $k \geq 1$ je $a_k = 0$, $b_k = 1$ a $a_j = 1$, $b_j = 0 \forall j > k$ a je-li $k > 1$, je $a_j = b_j \forall j = 1, \dots, k-1$, pak $s(a) = s(b)$.

Příklad takových a a b je následující:

$$\begin{aligned} a &= \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 1, 0, 0, \dots\} \\ b &= \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 0, 1, 1, \dots\} \end{aligned}$$

Označme $P' = \{\{a_1, a_2, \dots\} \in P | a_k = 0, a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 1 \text{ pro nějaké } k \geq 1\}$. Je $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, kde $P_k = \{\{a_1, a_2, \dots\} \in P | a_k = 0, a_j = 1 \forall j > k\}$. Je P_k spočetná (dokonce konečná) $\forall k$, a tak P je spočetná a $P - P'$ tedy není spočetná, jinak by $P = (P - P') \cup P'$ byla spočetná.

s je omezené na $P - P'$ je prosté: je-li $a = \{a_1, a_2, \dots\}$, $b = \{b_1, b_2, \dots\} \in P - P'$, $a \neq b$, existuje k , že $a_k \neq b_k$. Buď třeba $a_k < b_k$, tj. $a_k = 0$, $b_k = 1$. Protože $a \in P - P'$, není $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 1$ a tedy $s(a) < s(b)$, takže $s|_{P - P'}$ prosté zobrazení nespočetné množiny $P - P'$ do $\langle 0, 1 \rangle$, je tedy $s(P - P')$ nespočetná a tak $\langle 0, 1 \rangle$ obsahuje nespočetnou podmnožinu, nemůže být tedy podle věty 41 spočetná. Podle téže věty je tedy i \mathbb{R} nespočetná. \square

Poznámka 44. Řekněme, že mohutnost množiny A je menší než mohutnost množiny B ($\text{moh } A < \text{moh } B$), jestliže je nějaké prosté zobrazení A do B , ale žádné B do A . Tzv. hypotéza kontinua předpokládá, že není množina C , pro níž platí $\text{moh } \mathbb{N} < \text{moh } C < \text{moh } \mathbb{R}$.

Kapitola 4

Limity funkcí

Definice 45. Reálnou (komplexní) funkcí na množině M se rozumí zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$. Funkci f nazveme shora (zdola) omezenou na M , jestli existuje nějaké číslo $k(K) \in \mathbb{R}$, že $f(x) \leq K \forall x \in M$, resp. $f(x) \geq k \forall x \in M$. Nazveme ji omezenou, je-li omezená jak shora, tak zdola.

To je totéž jako to, že $\exists K > 0$ takové, že $|f(x)| \leq K \forall x \in M$.

Definice 46. Buďte $a, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu A (resp. $\pm\infty$), jestli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon \forall 0 < |x - a| < \delta$$

resp.

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) > K \forall 0 < |x - a| < \delta$$

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) < K \forall 0 < |x - a| < \delta$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$).

Řekneme, že f má v a limitu A ($\pm\infty$) zprava, jestli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) > K \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) < K \forall x \in (a, a + \delta)$$

Píše se $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). Obdobně se zavádí limita f v a zleva (místo $a < x < a + \delta$ se bere $a - \delta < x < a$) a píše se $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). Místo příslušných limit zprava (zleva) se někdy psává $f(a+)$, resp. $f(a-)$.

Řekneme, že f má v ∞ limitu $A \in \mathbb{R}$ (resp. $\pm\infty$) jestli $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ ($\forall K \exists k \in \mathbb{R}$, že $f(x) > k$, resp. $f(x) < k$). Píše se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). U $-\infty$ se místo $x \geq k$ bere $x \leq k$ a píše se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$).

Poznámka 47.

1. Aby měla f limitu (zleva, zprava), musí být dána na nějakém $P(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < |x - a| < \delta\}$ ($((a - \delta, a), (a, a - \delta))$), $\delta > 0$. Této množině se říká prstencové (levé, pravé) δ -okolí bodu a . Není-li δ nutné uvádět, píše se jen $P(a)$ ($P^+(a)$, $P^-(a)$).

Množině (K, ∞) ($(-\infty, K)$) lze říkat okolí nekonečna ($-\infty$).

2. Definice $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ má smysl i pro komplexní funkci komplexní proměnné x pro $a, A \in \mathbb{C}$.
3. Má-li f v bodě a vlastní (tj. konečnou) limitu, je na nějakém $P(a, \delta)$ omezená (totéž pro \lim v $\pm\infty$), například čísla $A - 1$ a $A + 1$.

Důsledek 48. Má-li f v $a \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) vlastní (tj. konečnou) limitu (zleva, zprava), je na nějakém prstencovém okolí $P(a, \delta)$ ($P^+(a, \delta)$, $P^-(a, \delta)$) omezená. Má-li ji u ∞ ($-\infty$), je omezená na nějakém okolí ∞ ($-\infty$).

Důkaz. Buď třeba $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak k $\varepsilon = 1 \exists \delta > 0$, že $|f(x) - A| < \varepsilon \forall 0 < |x - a| < \delta$, tj. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \forall x \in P(a, \delta)$ a tak pro $x \in P(a, \delta)$ je $||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \varepsilon$, odkud $|f(x)| < |A| + \varepsilon$.

Ostatní případy se dokáží obdobně. \square

Věta 49. f má v $a \in \mathbb{R}$ limitu právě když tam má limitu zprava i zleva a jsou stejné. V tom případě je hodnota limity rovna hodnotě obou jednostranných limit.

Důkaz. Nechť $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ a buď třeba $A \in \mathbb{C}$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, že $|f(x) - A| < \varepsilon \forall 0 < |x - a| < \delta$ a tak tím spíš $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, že $|f(x) - A| < \varepsilon \forall a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$), což znamená, že $A = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ($A = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$).

Jestli naopak existuje $f(a+)$, $f(a-)$ a jsou stejné (označme je $A \in \mathbb{C}$), pak to znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon \forall a < x < a + \delta' \quad (4.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta} > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon \forall a - \tilde{\delta} < x < a \quad (4.2)$$

takže je-li $\varepsilon > 0$, položíme $\delta = \min \delta(\varepsilon), \tilde{\delta}(\varepsilon)$. Pro $0 < |x - a| < \delta$ pak platí (4.1) i (4.2) a tedy $|f(x) - A| < \varepsilon \forall x \in P(a, \delta)$.

Případy, kdy $A = \infty$ ($-\infty$) se dokážou obdobně. \square

Věta 50 (Heineho o vztahu limity funkce a posloupnosti). Funkce f má v $a \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) limitu právě když platí

$$\forall \{a_n\} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ takovou, že } a_n \rightarrow a, \text{ ale } a_n \neq a \forall n, \text{ existuje } \lim f(a_n)$$

Je-li tato podmínka splněna, je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ stejná \forall takové posloupnosti a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se jí rovná.

Důkaz. \Rightarrow : Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, kde třeba $a, A \in \mathbb{C}$, Buď $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $a_n \rightarrow a$, $a_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{f(a_n)\}$ má limitu A .

Buď $\varepsilon > 0$. Protože $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$, $a \in \mathbb{C}$, existuje $\delta > 0$, že

$$|f(x) - A| < \varepsilon \forall 0 < |x - a| < \delta \quad (4.3)$$

Protože $a_n \rightarrow a$, tak $\exists k(\delta) \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \delta \forall n \geq k$. Ježto $a_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je navíc $0 < |a_n - a| < \delta$ a podle (4.3) je $|f(a_n) - A| < \varepsilon \forall n \geq k$ a tak má $\{f(a_n)\}$ limitu (rovnou A).

\Leftarrow : Nechť platí podmínka věty 50. Jestli $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$, $a_n \neq a$, $b_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\{f(a_n)\}$ i $\{f(b_n)\}$ má limitu. Posloupnost $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$ opět jde k a (podle věty 25) a má členy různé od $a \forall n$, takže podle věty 50 má posloupnost

$$\{f(a_1), f(b_1), f(a_2), \dots\}$$

limitu. Ale $\{f(a_n)\}$ a $\{f(b_n)\}$ z ní jsou vybrané a tak mají limitu stejnou (věta 23). Označme ji A a buď třeba $A \in \mathbb{C}$. Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

K důkazu (sporem) předpokládáme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ není A . To pak

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n \in \mathbb{C}, 0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}, \text{ že } |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Jelikož $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \forall n$ a $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, je jednak $x_n \rightarrow a$ (19), jednak $x_n \neq a \forall n$. Ale protože $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, není $f(x_n) \rightarrow A$, což je spor s větou 50. \square

Poznámka 51. Věta 50 pro jednostranné limity má tvar: Funkce reálné proměnné má v $a \in \mathbb{R}$ limitu zleva (zprava) právě když

$$\forall \{a_n\} \subset \mathbb{R} \text{ takovou, že } a_n \rightarrow a, \text{ ale } a_n < a \ \forall n \quad (a_n > a \ \forall n), \text{ existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

Je-li tato podmínka splněna, je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ stejná pro všechny takové posloupnosti $\{a_n\}$ z této podmínky a $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$) je rovna jejich společné hodnotě.

Důsledek 52. Značka \lim nechť znamená v každém tvrzení kteroukoliv z $\lim_{x \rightarrow a}$, $\lim_{x \rightarrow a+}$, $\lim_{x \rightarrow a-}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$.

1. f má nejvýše jednu limitu.
2. (aritmetika limit): existuje-li $\lim f$ a $\lim g$, pak

$$(a) \lim (f + g) = \lim f + \lim g$$

$$(b) \lim fg = \lim f \cdot \lim g$$

$$(c) \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$$

má-li pravá strana smysl (tj. pak existuje \lim nalevo a platí rovnost).

Důkaz.

1. Nechť třeba

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \tag{4.4}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B, \quad a \in \mathbb{C} \tag{4.5}$$

Bud' $\{a_n\}$ takové, že $a_n \rightarrow a$, $a_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}$. Podle věty 50 plyne z (4.4), že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ a podle (4.5) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ a podle věty 13 je $A = B$.

2. Nechť třeba jde o limitu $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ funkce reálné proměnné. Je-li $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n < a \ \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \rightarrow a$ tak podle věty 50 implikace \Rightarrow platí $f(a_n) \rightarrow \lim f$, $g(a_n) \rightarrow \lim g$.

Má-li třeba smysl součin $\lim f \cdot \lim g$, má $\{f(a_n) \cdot g(a_n)\}$ limitu, a to $\lim f \cdot \lim g$. Podle věty 50 implikace \Leftarrow ji má i $f \cdot g$ a dokonce tutéž, je tedy dokázáno (b). Obdobně i pro další body (1) a (3). □

Věta 53 (2. věta o limitě součinu). Jestli je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $g(x)$ je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a , pak existuje i limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ a je rovna 0.

Důkaz. Důkaz je podle věty 50. □

Věta 54 (2. věta o limitě převrácené hodnoty). Jestli je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ (< 0) na nějakém prstencovém okolí bodu a , pak existuje i limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ a je rovna ∞ ($-\infty$).

Důkaz. Důkaz je podle věty 50. □

Věta 55. Bud' $f \leq g$ na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Pak platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí věty 50 sporem. Nechť $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) > B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Je-li $\{x_n\}$ taková posloupnost, že $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $f(x_n) \rightarrow A$, $g(x_n) \rightarrow B$. Je $|f(x_n)| \leq g(x_n) \ \forall n > k$, protože existuje $\delta > 0$, že na $P(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ je $f(x) < g(x)$ a ježto $x_n \rightarrow a$, tak k $\delta > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}$, že $|x_n - a| < \delta \ \forall n \geq k$. Navíc $x_n \neq a \ \forall a$ a tak $0 < |x_n - a| < \delta$, tj. $x_n \in P(a, \delta)$, odkud $A \leq B$, což je ale spor. □

Věta 56. Nechť $\exists A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a bud' $A < B$. Pak $\exists \delta > 0$, že $f(x) < g(x) \ \forall x \in P(a, \delta)$.

Důkaz. Větu si dokážeme sporem. Předpokládáme tedy, že takové $\delta > 0$ není.

$$\forall \delta > 0 \exists x_\delta \in P(a, \delta), \text{ že } f(x_\delta) \geq g(x_\delta)$$

Mezi jiným to tedy platí i pro $\delta_n = \frac{1}{n}$, tj.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in P\left(a, \frac{1}{n}\right), \text{ že } f(x_n) \geq g(x_n)$$

Je teda $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ a tak $x_n \rightarrow a$ (pro $n \rightarrow \infty$). Navíc $x_n \neq a \forall n$ a tak podle věty 50 $\exists \lim f(x_n) = A$, $\lim g(x_n) = B$ a je $A \geq B$, což je spor. \square

Věta 57. Na nějakém okolí $P(a, \delta)$ buď $f \leq g \leq h$ a nechť $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, pak $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a ta se rovná jejich společné hodnotě.

Důkaz. Větou 50. \square

Definice 58. O reálné funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že roste (neklesá, klesá, neroste), jestli $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$) $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Je-li f některá z těchto čtyř, nazveme ji monotónní. Jestli roste nebo klesá, nazveme ji ryze monotónní.

Věta 59. Buď f monotónní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Není-li a jeho levý (pravý) krajní bod, existuje konečná limita funkce $f(a-)$ ($f(a+)$). Je-li $a \in \mathbb{R}^*$ jeho levý (pravý) krajní bod, existuje $f(a-)$ ($f(a+)$).

Přitom jestli f na I neklesá (neroste), je $f(a-) = \sup_{x \in I, x < a} f(x)$ ($\inf_{x \in I, x < a} f(x)$) a $f(a+) = \inf_{x \in I, x > a} f(x)$ ($\sup_{x \in I, x > a} f(x)$).

Důkaz. Nechť třeba f na I neklesá a $a \in I$ není levý krajní bod. Ukážeme třeba, že $\exists f(a-)$ a je to $s = \sup_{x \in I, x < a} f(x)$.

Protože je $f(x) \leq f(a) \forall x \in I, x < a$, je i $s \leq f(a)$ a není levý krajní v I a tak $\exists \tilde{x} \in I$, $\tilde{x} < a$, odkud $f(\tilde{x}) \leq s$. A tak $f(\tilde{x}) \leq s \leq f(a)$, tzn. s je konečné. Ukážeme, že $s = f(a-)$.

Buď $\varepsilon > 0$. Pak $s - \varepsilon < s$, proto $\exists x' \in I$, $x' < a$, že $f(x') > s - \varepsilon$ (věta 5) a protože f neklesá, je $f(x') \leq f(x) \forall x' < x < a$. Takže $s - \varepsilon \leq f(x) \leq s < s + \varepsilon \forall x \in (x', a)$, což dokazuje žádané. Ostatní případy lze rozbrat obdobně. \square

Definice 60. O funkci f řekneme, že roste zleva (zprava) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestli $\exists \delta > 0$, že $f(x) < f(a) \forall x \in (a - \delta, a)$ ($f(x) > f(a) \forall x \in (a, a + \delta)$).

Obdobně se zavádí klesání f v a zleva a zprava.

Věta 61. f roste (klesá) na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ právě když

- roste (klesá) zleva v každém $a \in I$ který není případným levým krajním bodem I
- roste (klesá) zprava v každém $a \in I$ který není případným pravým krajním bodem I

Důkaz. \Rightarrow zjevné

\Leftarrow je-li splněna podmínka věty, třeba v případě růstu, zvolme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$; ukážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$.

Označme $A = \{x \in (x_1, x_2) \mid f(x_1) < f(x_2)\}$. Platí

- (a) $A \neq \emptyset$ neb $(x_1, x_1 + \delta') \subset A$ s nějakým $\delta' > 0$ (růst f v x_1 zprava)
- (b) jestli $\alpha \in A$, $\alpha < x_2$, tak $\exists \delta > 0$, že $(\alpha, \alpha + \delta) \subset A$ (růst f v α zprava)
- (c) $\sup A \in A$: nechť $b = \sup A$, je $b \geq x_1 + \delta'$ a tak je $b > x_1$, tudíž $\exists \delta > 0$, že

$$f(x) < f(b) \quad \forall x \in (b - \delta, b) \quad (4.6)$$

(růst f v b zleva)

Protože $b - \delta < b = \sup A$, existuje podle 2. vlastnosti suprema prvek $p \in A$, že $p > b - \delta$, takže $f(x_1) < f(p) \leq f(b)$, což znamená, že $b \in A$.

Je $b = x_2$: je $b \leq x_2$ a předpokládejme, že $b < x_2$. Protože $b \in A$ podle (0c), je podle (0b) $\langle b, b + \delta \rangle \subset A$ pro nějaké $\delta > 0$ a tak $b < \sup A = b$ a docházíme ke sporu.

Je tedy $f(x_2) = f(b) > f(x_1)$. \square

Spojitosť

Definice 62. Funkci f nazveme spojitou v $a \in \mathbb{C}$ jestli

1. f je v a definovaná
2. existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Funkci reálné proměnné nazveme spojitou v $a \in \mathbb{R}$ zprava (zleva) jestli

1. je v a definovaná
2. existuje $f(a+) (f(a-))$
3. $f(a+) = f(a) (f(a-) = f(a))$

Je-li f daná na okolí (pravém, levém) bodu a a neplatí bod 2 nebo 3, řekneme, že není v a spojitá nebo že je v a nespojitá, má v a nespojitost, a je jejím bodem nespojitosti, ... (zprava, zleva).

Definice 63. Necht' má f v $a \in \mathbb{R}$ nespojitost. Jestli existuje konečná $f(a-)$ a $f(a+)$, nazveme ji nespojitostí 1. druhu (ten skok), jinak jde o tzv. nespojitost 2. druhu.

Důsledek 64. Funkce monotónní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má v každém bodě z I nejvýš nespojitost 1. druhu.

Důsledek 65. Množina všech bodů nespojitosti monotónní funkce na intervalu je nejvýše spočetná.

Důkaz. Buď f monotónní na intervalu I , $A \subset I$ množina jejích bodů nespojitosti. Je-li A konečná, je důkaz hotov, jinak každému $a \in A$ přiřadíme interval I_a mezi $f(a-)$ a $f(a+)$. Necht' třeba f neklesá, to pak je $I_a = (f(a-), f(a+))$.

V každém I_a vybereme racionální číslo $r(a)$. Je-li $a, a' \in A$, $a < a'$, je $f(a+) < f(a'-)$ (zvolme $b \in (a, a')$, pro $a < x < b < x' < a'$ je $f(x) \leq f(x')$, odkud $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \leq f(x') \forall b < x' < a'$, načež $f(a+) \leq \lim_{x \rightarrow a'-} f(x') = f(a'-)$).

Je tedy $r(a) < f(a+) \leq f(a'-) < r(a')$, takže r je prosté zobrazení A do \mathbb{Q} . Protože je \mathbb{Q} spočetná (důsledek 40), $r(a) \in \mathbb{Q}$, je i $r(A)$ a i tedy A spočetná. \square

Věta 66 (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí na intervalu). Je-li f spojitá na intervalu I , $a, b \in I$, pak nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$ (přesněji, je-li $a, b \in I$ a d mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak je c mezi a a b , že $f(c) = d$).

Důkaz. Buď $a, b \in I$, $a < b$ třeba $f(a) \leq f(b)$. Je-li d jedno z $f(a)$ nebo $f(b)$, je buďto $d = f(a)$ a pak $c = a$ nebo $d = f(b)$ a pak $c = b$.

Buď tedy $f(a) < d < f(b)$ a označme $A = \{x \in \langle a, b \rangle, \text{ že } f(x) < d\}$, $c = \sup A$. Je $A \neq \emptyset$ (neb $a \in A$) a nemá největší prvek: je-li totiž $\alpha \in A$, pak z toho, že $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ (spojitost f), existuje $\delta > 0$, že $f(x) < d \forall x \in (\alpha, \alpha + \delta)$, takže α není největší v A . Odtud plyne, že $c \notin A$, takže jednak $c > a$ a jednak $f(c) \geq d$.

Kdyby bylo $f(c) > d$, existovalo by $\delta > 0$, že $f(x) > d \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ (spojitost f), takže $A \cap (c - \delta, c + \delta) = \emptyset$. Je $A \cap \langle c + \delta, b \rangle = \emptyset$ (jinak by bylo $c = \sup A \geq c + \delta$), načež $A \cap \langle c + \delta, b \rangle = A \cap [(c - \delta, c + \delta) \cup (c + \delta, b)] = [A \cap (c - \delta, c + \delta)] \cup [A \cap \langle c + \delta, b \rangle] = \emptyset$.

Tedy $c = \sup A \leq c - \delta$, což je spor a platí $f(c) = d$. \square

Důsledek 67. Je-li f spojitá reálná funkce, na intervalu I , je $f(I)$ interval.

Důkaz. Je-li $p = \inf f(I)$, $q = \sup f(I)$, je buď $p = q$ a pak $f(I) = \{p\}$ nebo je $p < q$. Je-li pak $p < d < q$, existuje $a, b \in I$, že $f(a) < d < f(b)$ a tedy podle věty 66 existuje c mezi a a b , že $f(c) = d$. Je tedy $(\inf f(I), \sup f(I)) \subset f(I) \subset \langle \inf f(I), \sup f(I) \rangle$, tedy $f(I)$ je jedním z intervalů $\langle p, q \rangle$, (p, q) , $\langle p, q \rangle$, (p, q) . \square

Věta 68. Reálná funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ tam nabývá suprema a infima – má tam tedy své maximum a minimum.

Důkaz. Buď $s = \sup f(\langle a, b \rangle)$. Podle 2. vlastnosti suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in \langle a, b \rangle$, že $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$.

Podle věty 30 (z každé posl. lze vybrat konvergentní) vybereme z $\{x_n\}$ konvergentní $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a její limitu označíme l . Pak $s - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq s$ a limitou ($k \rightarrow \infty$) odtud plyne: $s \leq \lim f(x_{n_k}) = f(l) \leq s$ (rovnost plyne ze spojitosti funkce), tj. $f(l) = s$. \square

Věta 69 (O limitě složené funkce). Bud'te $a, b \in \mathbb{R}^*$ a nechť

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad (4.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = A \quad (4.8)$$

Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = A$ jestli buďto
 $g(x) \neq b$ na nějakém okolí $P(a)$ nebo
 f je v b spojitá.

Důkaz. Bud'te třeba $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť platí podmínka, že $g(x) \neq b$ na nějakém okolí $P(a)$. Bud' $\varepsilon > 0$. Podle (4.8) je

$$\delta > 0, \text{ že } |f(y) - A| < \varepsilon \quad \forall 0 < |y - b| < \delta \quad (4.9)$$

Podle (4.7) je

$$\eta' > 0, \text{ že } |g(x) - b| < \delta \quad \forall 0 < |x - a| < \eta' \quad (4.10)$$

Podle podmínky zvolme

$$\tilde{\eta} > 0, \text{ aby } g(x) \neq b \quad \forall 0 < |x - a| < \tilde{\eta} \quad (4.11)$$

Pro $0 < |x - a| < \eta = \min(\eta', \tilde{\eta})$ je pak $0 < |g(x) - b| < \delta$ a podle (4.9) je $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$.

Jestli platí podmínka, že f je v b spojitá, pak (4.7) platí $\forall |y - b| < \delta$ (s hodnotou $A = f(b)$) a tak pro $0 < |x - a| < \eta'$ je $|g(x) - b| < \delta$ podle (4.10), načež podle (4.9) je $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$. \square

Definice 70. Bud' $A \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ takový, že $P(a, \delta) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$. Řekneme, že f má v a limitu $L \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ vůči A jestli $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, že $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall 0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$ (píšeme $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L$)

Věta 71. Bud' $A, B \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a nechť $P(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$, $P(a, \delta) \cap B \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$. Pak $\lim_{x \rightarrow a, x \in A \cup B}$ existuje právě tehdy, když existují $\lim_{x \rightarrow a, x \in A}$ a $\lim_{x \rightarrow a, x \in B}$ a jsou stejné.

Je-li tato podmínka splněna, je hodnota $\lim_{x \rightarrow a, x \in A \cup B} f(x)$ rovna společné hodnotě obou zmíněných limit.

Důkaz.

\Rightarrow zjevné

\Leftarrow Bud' $\varepsilon > 0$. Pak

$$\exists \delta' > 0, \text{ že } |f(x) - a| < \delta', \quad x \in A$$

$$\exists \tilde{\delta} > 0, \text{ že } |f(x) - a| < \tilde{\delta}, \quad x \in B$$

kde L je společná hodnota $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x)$. Pro $0 < |x - a| < \delta = \min \delta', \tilde{\delta}$, $x \in A \cup B$ pak je $|f(x) - L| < \varepsilon$. \square

Věta 72. *Bud' f prostá reálná funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Je-li na I spojitá, je její inverzní funkce f^{-1} spojitá na intervalu $f(I)$.*

Důkaz. Na I prostá f má na $f(I)$ inverzní f^{-1} . Je-li spojitá, je $f(I)$ podle věty 67 interval.

Bud' $a \in I$, který třeba není krajní. Je tedy $\vartheta > 0$, že $(a - \vartheta, a + \vartheta) \subset I$. Podle věty 67 je $J_\vartheta = f(I_\vartheta)$ interval ($\subset f(I)$) a $f(a)$ není jeho krajní bod (jinak by bylo $f(a) = \max f(x)$ nebo $f(a) = \min f(x)$; buďto to třeba to maximum, pak je $P = f((a - \delta, a)) \wedge Q = f((a, a + \delta))$ interval, $f(a)$ by bylo pravým krajním bodem obou a tak $P \cap Q = \emptyset$ – spor s prostotou f).

Bud' $\varepsilon > 0$ a lze předpokládat, že $\varepsilon < \delta$. Pak je tedy $J_\varepsilon = f(I_\varepsilon) \subset f(I)$, $f(a)$ není krajní v J_ε a tak existuje $\delta > 0$, že $(f(a) - \delta, f(a) + \delta) \subset J_\varepsilon = f((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$, tak, že pro $|y - f(a)| < \varepsilon$ je $f^{-1}(y) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. \square

Věta 73. *Prostá a spojitá f na intervalu I je ryze monotónní.*

Důkaz. Necht' pro $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(y_1) > f(y_2)$. Pak je buďto

1. $\langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle y_1, y_2 \rangle$ nejvýš jednobodový a tedy $x_1 < x_2 \leq y_1 < y_2$ (či $y_1 < y_2 \leq x_1 < x_2$) nebo
 2. jeden z těchto intervalů je částí druhého a tedy $x_1 \leq y_1 < y_2 \leq x_2$ (či $y_1 \leq x_1 < x_2 \leq y_2$) nebo
 3. nenastává ani první, ani druhá možnost a tedy $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ (či $y_1 < x_1 < y_2 < x_2$)
1. Je-li $f(y_1) < f(x_2)$, nabývá f maxima na $\langle x_1, y_1 \rangle$, ale ne v krajních bodech
Je-li $f(y_1) > f(x_2)$, nabývá f maxima na $\langle x_2, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
Je-li $f(y_1) = f(x_2)$ (a pak $y_1 = x_2$), nabývá f maxima na $\langle x_1, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
 2. Je-li $f(y_1) < f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle x_1, x_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
Je-li $f(y_1) > f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle x_1, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
 3. Je-li $f(y_1) < f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle y_1, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
Je-li $f(y_1) > f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle x_1, x_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech

Ve všech případech má funkce extrém na nějakém intervalu $\langle p, q \rangle \subset I$ $p < q$, ale ne v krajních bodech, tedy v nějakém $r \in (p, q)$. Přitom $f((p, r))$ i $f((r, q))$ jsou podle věty 67 intervaly. Je tehdy $f(r)$ jejich společným krajním bodem.

Protože je v r extrém funkce f na $\langle p, q \rangle$, je v r též extrém jak na $\langle p, r \rangle$ tak i na $\langle r, q \rangle$ a tak je $f(r)$ současně pravým, nebou současně levým krajním bodem intervalů $f((p, r))$, $f((r, q))$. Ty se tedy protínají přinejmenším bodem $f(r)$. Ale ani $f((p, r))$ ani $f((r, q))$ není jednobodový (jinak by byla f na $\langle p, r \rangle$ nebo na $\langle r, q \rangle$ konstantní, což nelze, neb f je prostá), takže existuje $t \in f((p, r)) \cap f((r, q))$, $t \neq f(r)$, načež existuje $v_1 \in (p, r)$ a $v_2 \in (r, q)$, že $f(v_1) = t = f(v_2)$. Protože je $v_1 \neq v_2$, jedná se o spor s prostotou f . \square

Kapitola 5

Derivace

Definice 74. Derivací funkce f v a (zleva, zprava) se rozumí

$$\lim_{x \rightarrow a(a+, a-)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (5.1)$$

pokud existuje. Značíme $f'(a)$ nebo $\frac{d f(a)}{d x}$ (resp. $f'_+(a)$, $f'_-(a)$). Je-li konečná (∞ , $-\infty$), říká se jí vlastní (nevlastní) derivace.

Poznámka 75. Položíme-li v (5.1) $x - a = t$, máme podle věty 69

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} \quad (5.2)$$

má-li jedna strana smysl (tj. existuje-li limita vlevo (vpravo), tak i vpravo (vlevo)) a jsou stejné.

Věta 76. *Nechť existuje $f'(a)$, $g'(a)$. Pak*

1. $(f' + g')(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(f'g')(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Má-li příslušná pravá strana smysl (a v bodě 2 je-li navíc jedna z funkcí v a spojitá). Totéž platí s jednostrannými derivacemi.

Důkaz. Třeba bod 2 (a buď v a spojitá třeba f).

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \end{aligned}$$

Nebo bod 3:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}{g(x)g(a)} \end{aligned}$$

□

Věta 77. f má v $a \in \mathbb{R}$ derivaci právě tehdy, když existuje derivace zleva a zprava a tyto dvě derivace jsou si rovny.

Je-li podmínka splněna, je $f'(a)$ rovna jejich společné hodnotě.

Důkaz. Důkaz pomocí věty 49. □

Věta 78 (O derivaci složené funkce). Funkce g měj derivaci v bodě a , funkce f v $g(a)$ a buď g v a spojitá. Pak má $f(g(x))$ v a derivaci a je $(f \circ g)(a) = f'(g(a))g'(a)$, má-li součin napravo smysl.

Důkaz. Zkoumejme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$. Pro ta x , kde $g(x) \neq g(a)$, je

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (5.3)$$

Označme $A = \{x | g(x) \neq g(a)\}$, $B = \{x | g(x) = g(a)\}$. Protože je g v a spojitá, je $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ a tak položíme-li $g(x) = y$, je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = f'(g(a)) \quad (5.4)$$

podle věty 69 použité na $F(g(x))$ s $F(y) = \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}$ ($\lim_{y \rightarrow g(a)} F(y) = f'(g(a))$) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, $g(x) \neq g(a)$ všude na A , takže existuje $F(g(x)) = f'(g(a))$.

Dále

$$\text{existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \quad (5.5)$$

a tak z 5.3 plyne podle věty o limitě součinu, 5.4, 5.5

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = f'(g(a))g'(a) \quad (5.6)$$

Pro $x \in B$ je zlomek nalevo v (5.3) a tedy jeho limita $\lim_{x \rightarrow a, x \in B}$, jakož i zlomek $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ napravo nula. Protože existuje $g'(a)$, je podle věty 71

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a, x \in B} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = 0$$

tj. $g'(a) = 0$. Protože $f'(g(a))g'(a)$ má smysl, je $f'(g(a))g'(a) = 0$ a tak platí dotazovaná rovnost.

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in B} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = f'(g(a))g'(a) \quad (5.7)$$

Podle (5.6) a (5.7) a věty 71 platí dokazovaná rovnost. □

Věta 79. Bud' f^{-1} inverzní funkce ke spojitě funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ a necht' existuje $f'(a) \neq 0$. Pak má f^{-1} v $b = f(a)$ derivaci a je

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \left(= \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \right)$$

Důkaz. K použití věty 69 položme vnější funkci $V(x) = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ a vnitřní $v(y) = f^{-1}(y)$. Platí

1. $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = \frac{1}{f'(a)}$
2. $\lim_{x \rightarrow b} v(y) = f^{-1}(b)$ (f^{-1} je spojitá podle věty 72)
3. $v(y) = f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ na $P(b)$ (dokonce všude na $f(I) - b$, neb f^{-1} je prostá a tak $f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ jen pro $y = b$).

Podle věty 69 existuje

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow b} V(v(y)) &= \lim_{y \rightarrow b} y \rightarrow b \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)-b)}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \lim_{y \rightarrow b} y \rightarrow b \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow b} y \rightarrow b \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = f^{-1}(b)\end{aligned}$$

□

Věta 80. Má-li f v a vlastní derivaci (zleva, zprava), je v a spojitá (zleva, zprava).

Důkaz. f měj třeba vlastní derivaci $f'(a)$. Pak $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$ a tak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a) + f(a)) = f(a)$ □

Věta 81. Je-li $f'(a) > 0$ (< 0), f v bodě a roste (klesá).

Důkaz. Buď třeba $f'(a) > 0$, tj. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Podle věty 56 je $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ na nějakém $P(a, \delta)$. Pro $x \in (a, a + \delta)$ je však $x > a$ a tak i $f(x) > f(a)$, pro $x \in (a - \delta, a)$ je $x < a$ a tak i $f(x) < f(a)$. □

Důsledek 82. Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I$ (v případných krajních bodech se myslí příslušná jednostranná derivace), tak f na I roste (klesá).

Důkaz. Podle věty 81 f roste (klesá) v každém $x \in I$ a podle věty 61 roste (klesá) na I . □

Definice 83. Řekneme, že reálná funkce f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má v $a \in I$ ostré lokální maximum (lokální maximum, ostré lokální minimum, lokální minimum) jestli $\exists P(a)$, že $f(x) > f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$, $f(x) < f(a)$, $f(x) \leq f(a)$).

Nastane-li některý z těchto případů, říkáme, že f má v a lokální extrém.

Věta 84. Má-li f v a extrém a existuje $f'(a)$, je $f'(a) = 0$.

Důkaz. Je-li $f'(a) > 0$ (< 0), f podle věty 81 v a roste (klesá) a tak v a není extrém. □

Definice 85. Bodu a , kde $f'(a) = 0$ se říká stacionární bod funkce f .

Důsledek 86. Reálná funkce f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má v $a \in I$ extrém jen je-li a stacionární, krajní, nebo v něm nemá f derivaci.

Kapitola 6

Obecné věty o derivaci

Věta 87 (Rolleova). *Bud' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f bud' spojitá reálná funkce na $\langle a, b \rangle$, která má derivaci na (a, b) , taková, že $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Je-li f na $\langle a, b \rangle$ konstantní, splňuje tvrzení každé $c \in (a, b)$.

Bud' třeba $f(a) = f(b) = 0$ a předpokládejme, že třeba $f(p) > 0$ pro nějaké $p \in (a, b)$. Podle věty 68 je $c \in \langle a, b \rangle$, že $f(c) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$. Je $f(a) = f(b) = 0$, $f(p) > 0$ a tak $c \neq a$ a $c \neq b$, takže $c \in (a, b)$.

Protože existuje $f'(c)$, ale podle věty 84 není $f'(c) > 0$, ani $f'(c) < 0$, takže $f'(c) = 0$.

Je-li $f(a) = f(b) \neq 0$, použijeme už dokázaného na $h(x) = f(x) - f(a)$. Je $h(a) = h(b) = 0$ a tak $0 = h'(c) = f'(c)$ pro nějaké $c \in (a, b)$. \square

Věta 88 (O střední hodnotě, tzv. Lagrangeova). *Bud' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f spojitá reálná funkce na $\langle a, b \rangle$, která má na (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Důkaz. Od f odečteme lineární funkci $l(x)$ takovou, že $l(a) = f(a)$, $l(b) = f(b)$. Vzniklá funkce splňuje podmínky a tedy pro ni platí závěr věty 87.

Funkce l má tvar $l(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Pro $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ tedy existuje $c \in (a, b)$, že $h(c) = 0$, tj. $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, což bylo dokázat. \square

Věta 89 (Zobecněná věta o střední hodnotě, tzv. Cauchyova). *Bud' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f a g spojitě reálné funkce na $\langle a, b \rangle$, které mají všude na (a, b) derivaci, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Pak je $c \in (a, b)$, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Důkaz. $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ splňuje podmínky věty 87. \square

Důsledek 90. Nechť je $f'(x) > 0$ (≥ 0 , < 0 , ≤ 0) na intervalu I (obsahuje-li některý z krajních bodů, rozumí se v něm příslušná jednostranná derivace). Pak $f(I)$ roste (neklesá, klesá, neroste).

Důkaz. Bud' $f' > 0$ na I a bud' $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Pak je $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ (použitá věta 88 na $\langle x_1, x_2 \rangle$) a pak $f(x_2) > f(x_1)$. Zbytek obdobně. \square

Věta 91. *Bud' f spojitá a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = A$. Pak existuje $f'(a)$ a rovná se A . ($f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$) Totéž s jednostrannými limitami i derivacemi.*

Důkaz. Třeba pro $f'_-(a)$: existence $\lim_{x \rightarrow a-} f'(x)$ dává existenci $f'(x)$ na $P(a)$, kde je tedy $f(x)$ konečná a tedy f spojitá (věta 80). Protože je f zleva spojitá i v a , je spojitá na $\langle x, a \rangle \forall x \in P(a)$. Navíc existuje $f'(x)$ na $P^-(a)$ a tak podle věty 88 existuje $c(x) \in (x, a)$, tj. $x < c(x) < a$, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c(x))$.

Použijeme teď větu 69 na vnější funkci $F(y) = f'(y)$ a vnitřní funkci $g(x) = c(x)$. Je $x \leq c(x) \leq a$ a tak $\lim_{x \rightarrow a} c(x) = a$ (věta o majorizované konvergenci). \square

Věta 92 (l'Hospitalovo pravidlo). *Bud' $a \in \mathbb{R}^*$ a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna A jestli*

1. *bud' to $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, nebo*
2. *$\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$*

Podobně pro jednostranné limity.

Důkaz. Bud' třeba $a \in \mathbb{R}$ a dokážeme tvrzení pro limitu zprava. Z existence $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ plyne, že existuje konečná f' i g' na nějakém $(a, a + \Delta)$, takže tam je f i g spojitá a navíc $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, a + \Delta)$. Položme $F(x) = f(x)$ na $(a, a + \Delta)$, $F(x) = 0$ pro $x = a$. Dále $G(x) = g(x)$ na $(a, a + \Delta)$ a rovna 0 pro $x = a$. Necht' nejdřív platí 1. Z toho, že $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ plyne spojitost F a G v a zprava a tak jsou F i G spojitě na $\langle a, x \rangle$, mají konečnou derivaci na $(a, x) \forall x \in (a, a + \Delta)$ a tak $\forall x \in (a, a + \Delta) \exists c(x) \in (a, x)$, tj. $a < c(x) < x$, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c(x))}{G'(c(x))} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

(věta 89) Podle věty 69 (s vnitřní funkcí $c(x)$ a vnější $V(y) = \frac{f'(y)}{g'(y)}$) je

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y \rightarrow a+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

což již bylo dokázáno.

Bud' ale třeba $a \in \mathbb{R}$ a dokážeme tvrzení pro limitu zprava. Necht' ale platí 2. Je-li $a < x < x_1 < a + \Delta$, splňuje f na $\langle x, x_1 \rangle$ podmínky věty 89 a tak existuje $c(x) \in (x, x_1)$, že $f(x_1) - f(x) = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} (g(x_1) - g(x))$. Po vydělení $g(x) (\neq 0 \text{ na } (a, a + \Delta))$ to dá

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} \quad \text{pro } a < x < x_1 < a + \Delta \quad (6.1)$$

Bud' třeba $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z (6.1) pak plyne

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - A &= \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} - A - \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \frac{g(x_1)}{g(x)} + \frac{f(x_1)}{g(x)} \\ \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &\leq \left| \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} - A \right| + \left| \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \right| \left| \frac{g(x_1)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x_1)}{g(x)} \right| \quad \forall a < x < x_1 < a + \Delta \end{aligned} \quad (6.2)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$). Protože $\lim_{y \rightarrow a+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = A$, lze zvolit $\Delta > 0$ tak malé, aby

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - A \right| < \varepsilon \quad \forall y \in (a, a + \Delta) \quad (6.3)$$

Zvolme $x_1 \in (a, a + \Delta)$, takže (6.2) platí pro všechna $x \in (a, x_1)$. Protože $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = \infty$, je $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{|f(x_1)|}{|g(x)|} = 0$, takže existuje δ ($\delta < \Delta$), že $\left| \frac{g(x_1)}{g(x)} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{f(x_1)}{g(x)} \right| < \varepsilon \forall x \in (a, a + \delta)$. Podle (6.3) pak pro toto x je $\left| \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \right| < |A| + \varepsilon$ (neb $c(x) \in (a, a + \Delta)$) načež podle (6.2) je

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \varepsilon + (|A| + \varepsilon) \varepsilon + \varepsilon < \varepsilon + |A| \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (|A| + 3) \varepsilon \quad \forall x \in (a, a + \delta)$$

Je-li třeba $a = \infty$, je podle věty 69 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}$, což je podle už dokázaného

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{(f(\frac{1}{y}))'}{(g(\frac{1}{y}))'} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} \text{ a to je opět podle věty 69 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

Věta 93. Pro $n \geq 1$ nechť existuje $f^{(n)}(c)$, $g^{(n)}(c)$ a $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = g(c) = g'(c) = \dots = g^{(n-1)}(c)$. Pak existuje

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

má-li tento podíl smysl.

Důkaz. Důkaz provedem indukcí. Pro $n = 1$ je

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(podle věty o limitě podílu).

Nechť dále tvrzení platí pro $n \geq 1$ a buďte podmínky věty splněny pro $n+1$. Pak $F(x) = f'(x)$, $G(x) = g'(x)$ splňují podmínky věty s n a platnost tvrzení pro n dá

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(c)}{G^{(n)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

tj. $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = 0$ (existuje konečná $f'(a)$, $g'(a)$ a tak je f i g v c podle věty 82 spojitá), načež věta 92 dává, že

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

□

Kapitola 7

Mnohočleny

Tvrzení 94. *Bud' P mnohočlen stupně n a $a \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$. Pak*

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Důkaz. Je $P(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k$, protože

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (x-a+a)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x-a)^l a^{k-l} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq k}} a_k \binom{k}{l} a^{k-l} (x-a)^l \\ &= \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=l}^n a_k \binom{k}{l} a^{k-l} \right) (x-a)^l = \sum_{l=0}^n b_l (x-a)^l \end{aligned}$$

a tak $P^{(k)}(a) = k!b_k$, tj. $b_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$

Má-li f n -tou derivaci v a , napišme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$. □

Definice 95. Existuje-li $f^{(n)}(a)$ pro nějaké $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, pak mnohočlen

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

nazveme Taylorovým mnohočlenem stupně n (funkce f se středem v a).

Rozdíl $R_{n+1,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x)$ se říká zbytek (funkce po $T_{n,f,a}(x)$).

Věta 96 (Taylorova). *Bud' $a, x \in \mathbb{R}$, $a \neq x$, n celé, $n \geq 0$. Reálná funkce f měj $n+1$. na otevřeném intervalu I^0 a spojitou derivaci na uzavřeném intervalu I s krajními body a a x . Bud' φ spojitá reálná funkce na I , která má na I^0 všude nenulovou derivaci.*

Pak

$$c \in I^0, \text{ že } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \quad (7.1)$$

Volba $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (7.2)$$

(tzv. Lagrangeův tvar zbytku).

Volba $\varphi(t) = t$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a) \quad (7.3)$$

Důkaz. Položme ve vyjádření $R_{n+1}(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$ místo a proměnné t , tj.

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Pak f je spojitá na I , má

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f(t) - \left(-\frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) - \left(-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) - \\ &\quad - \dots - \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \text{ na } I^0, F(x) = 0, F(a) = R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

a tak podle věty 89 je $c \in I^0$, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{-R_{n+1}(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!\varphi'(c)}$$

což je (7.1) a zmíněná volba φ dává (7.2) a (7.3). \square

Příklad 97. Máme najít sinus 1 s přesností 10^{-6} .

Najdeme hodnotu $T_{n,\sin,0}(1)$ funkce $\sin x$, s takovým n , aby $|R_{n+1,\sin,0}(1)| < 10^{-6}$. Je $T(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin^{(k)} 0}{k!} x^k$. Použijeme-li Lagrangeova tvaru zbytku, je $R_{n+1}(x) = \frac{\sin^{(n+1)} c}{(n+1)!} (x-0)^{n+1}$ a tak $|R_{n+1}(1)| = \frac{|\sin^{(n+1)} c|}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ a hledíme tedy n , aby $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$.

To je už pro $n+1 = 10$, tj. $n = 9$. Spočítáme tedy $(\sin^{(2k)} 0 = 0, \sin^{(2k+1)} 0 = (-1)^k)$

$$T_{9,\sin,0}(0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$$

Definice 98. Funkce f a g Buďte dány na $P(a)$. Budeme psát $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ jestli $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Obdobně jednostranné případy.

Poznámka 99.

1. $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, pak $\alpha f_1 + \beta f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ (α, β konst.)
2. $f_1(x) = o(g_1(x))$, $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$, pak $f_1 \cdot f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \rightarrow a$
3. $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a $h(x)$ buď omezená na $P(a)$, pak $f(x)h(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$
4. $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = o(h(x))$, $x \rightarrow a$, pak $f(x) = o(h(x))$, $x \rightarrow a$

Důkaz. Snadné ověření dle definice. \square

Věta 100 (Peanův tvar zbytku). *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$, pak $R_{n+1,f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$.*

Důkaz. Funkce $F(x) = R_{n+1,f,a}(x)$ a $g(x) = (x-a)^n$ splňují podmínky věty 93 ($F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a)$, $g^{(n)}(a) = n! \neq 0$, rovnosti $F^{(j)}(a) = 0$ plynou například z tvrzení 94). Takže $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{R_{n+1}(a)}{((x-a)^n)^{(n)}} = \frac{R_{n+1}(a)}{n!} = 0$. \square

Lemma 101. *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$. Pak je*

$$f(x) = o((x-a)^n) \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$$

Důkaz. Nejprve si ukážeme implikaci \Rightarrow . Ve větě 94 vezmeme $F(x) = f(x)$, $g(x) = (x-a)^n$. Je $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0$, $g^{(n)}(a) = n! \neq 0$ a tak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

Ted' dokážeme obrácenou implikaci nepřímým důkazem. Je-li $f^{(j)}(a) \neq 0$ pro nějaké $1 \leq j \leq n$, buď l nejmenší takové j . Pak pro $F(x) = f(x)$, $g(x) = (x-a)^l$ je podle věty 94

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(l)}(a)}{l!} \neq 0$$

a tak není $f(x) = o((x-a)^l)$ pro toto $l < n$. Je však $(x-a)^n = o((x-a)^l)$, $x \rightarrow a$ a tak podle poznámky 99.3 není ani $f(x) = o((x-a)^n)$. \square

Důsledek 102. *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$ a P buď takový mnohočlen stupně n , že $f(x) - P(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$. Pak $P(x) = T_{n,f,a}(x)$.*

(Existuje-li tedy $f^{(n)}(a)$, pak pro mnohočlen P stupně n je $f(x) - P(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$ právě když $P(x) = T_{n,f,a}(x)$).

Důkaz. Napišme podle tvrzení 94

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$$

Jestli $f - P(x) = o((x-a)^n)$, je $f(x) - P(x) = o((x-a)^k) \forall k = 0, 1, \dots, n$. Pro každé takové k je podle věty 101 $(f(x) - P(x))^{(k)}(a) = 0$, tj. $f^{(k)}(a) = k!a_k = 0$. \square

Věta 103 (Darbouxova vlastnost derivace spojitě funkce). *Buď $-\infty < a < b < \infty$, f buď spojitá na $\langle a, b \rangle$ a měj tam všude derivaci (v krajních bodech měj příslušné jednostranné derivace). Je-li d mezi $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$, pak existuje $c \in \langle a, b \rangle$, že $f'(c) = d$.*

Důkaz. Je-li $d = f'_+(a)$, je $c = a$. Je-li $d = f'_-(b)$, je $c = b$. Buď tedy $d \neq f'_+(a)$, $d \neq f'_-(b)$, tedy $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ a buď třeba $f'_+(a) < f'_-(b)$, takže $f'_+(a) < d < f'_-(b)$.

Buď $F(x) = f(x) - dx$ na $\langle a, b \rangle$, je tam spojitá a $F'_+(a) = f'_+(a) - d < 0$, $F'_-(b) = f'_-(b) - d > 0$, takže F v a zprava klesá a v b zleva roste. Protože je F na $\langle a, b \rangle$ spojitá, nabývá tam podle věty 68 (na intervalu nabývá minima i maxima) minima v nějakém $c \in \langle a, b \rangle$. Protože F v a klesá, je $c \neq a$ a v b roste, je $c \neq b$.

Je tedy $c \in (a, b)$. Podle věty 84 je $F'(c) = 0$, tj. $f'(c) = d$. \square

Kapitola 8

Ohýbání

Tvrzení 104. *Bud' f funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou rovnocenné:*

1. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
2. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
3. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
4. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2} \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
5. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Důkaz. Budeme potřebovat lemma:

Lemma 105. *Bud' $a, b \in \mathbb{R}$, $p_1 \equiv y = k_1(x - a) + b$, $p_2 \equiv y = k_2(x - a) + b$, $p \equiv y = kx + q$ přímky $k_1 \leq k_2$ nechť p protíná p_1 v $[c, d]$, kde $a < c$. Jestli p protíná p_2 v bodě $[c', d']$, kde $c' > c$, pak $k > k_2$.*

Důkaz. Je $p \equiv y = k(x - a) + k_1(c - a) + b = k_2(x - a) + b$ (k a q jsou tak určeny). Načež pro průsečík p s p_2 platí $k(x - a) + k_1(c - a) = k_2(x - a) + b$, odkud

$$x = \frac{kc - k_2a - k_1(c - a)}{k - k_2} = c' \quad (8.1)$$

Přitom je $c' > c$ a tak předpokládajíc, že $k < k_2$ dostaneme odsud $kc - k_2a - k_1(c - a) < (k - k_2)c$, tj. $(k_1 - k_2)(a - c) < 0$, přičemž ale $(k_1 - k_2) \leq 0$ a $(a - c) < 0$ a to je spor s tím, že $(k_1 - k_2)(a - c) < 0$.

Tvrzení platí i s neostrými, opačnými i opačnými neostrými nerovnostmi. \square

Nyní k samotnému důkazu.

$1 \Rightarrow 3$: Užijte se pomocné tvrzení na $p_1 \equiv y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$, $p_2 \equiv y = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$ a $p \equiv y = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}(x - x_2) + f(x_2)$. p protíná p_2 v $[x_3, f(x_3)]$, $x_3 > x_2$ a tak platí 3. bod.

Obdobně se dokáže, že $3 \Rightarrow 2$ a $2 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 4$: Bud' $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ a nechť platí 1 (a tedy i 3). Pak je $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}$ (první nerovnost plyne z 3, druhá z 1), což je výrok 4.

$4 \Rightarrow 2$: Bud' x_1, x_2, x_3 jako ve 2 a nechť platí 4. Zvolme $y \in (x_1, x_2)$, $z \in (x_2, x_3)$. Podle 4 je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, což je přímo 2.

$2 \Rightarrow 5$: Bud' x_1, x_2, x_3, x_4 jako v 5 a nechť platí 2. Pak je podle 2 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$, což je 5.

5 \Rightarrow 2: Nechť platí podmínky 5. Dokážeme nejdříve, že je pak f na I^0 (I bez případných krajních bodů) spojitá. Buď $a \in I^0$ a předpokládejme opak:

$$P^- : \exists \varepsilon > 0, \text{ že } \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in (a - \delta, a) \text{ tak, že } f(x_\delta) > f(a) + \varepsilon$$

Zvolíme-li $\delta = \frac{1}{n}$ a píšeme-li $x_{\frac{1}{n}} = x_n$, je $a - \frac{1}{n} < x_n < a$ a tak $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$; $\{x_n\}$ lze zvolit rostoucí. Je-li $m < n < k$, je podle 5 $\frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m} \leq \frac{f(a) - f(x_k)}{a - x_k}$. Přitom je $\frac{f(a) - f(x_k)}{a - x_k} = \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} < \frac{\varepsilon}{x_k - a}$ ($f(x_k) - f(a) > \varepsilon$ a $x_k - a < 0$). Ale $x_k - a \rightarrow 0$, $x_k - a < 0 \forall k$ a tak $\frac{\varepsilon}{x_k - a} \rightarrow -\infty$ takže je $\frac{\varepsilon}{x_k - a} < \frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m} \forall k$ od nějakého k_0 . No a to je spor. Funkce je tedy spojitá na I^0 .

Obdobně se přivede ke sporu předpoklad

$$P^+ : \exists \varepsilon > 0, \text{ že } \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in (a, a + \delta), \text{ že } f(x_\delta) > f(a) + \varepsilon$$

$$P_- : \exists \varepsilon > 0, \text{ že } \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in (a - \delta, a), \text{ že } f(x_\delta) < f(a) - \varepsilon$$

$$P_+ : \exists \varepsilon > 0, \text{ že } \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in (a, a + \delta), \text{ že } f(x_\delta) < f(a) - \varepsilon$$

Platí tedy negace P^+, P_+, P^-, P_- , tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

což je přímo spojitost f v a .

Je-li nyní x_1, x_2, x_3, x_4 jako v 5, limitou $x_3 \rightarrow x_2$ zprava v tamní nerovnosti plyne ze spojitosti f v x_2 vztah $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2}$ a píšeme-li x_3 místo x_4 , je to 2. \square

Definice 106. Má-li f na I některou z vlastností 1 až 5 z tvrzení 104 (a tedy všechny), nazveme ji konvexní na I . Platí-li s ostrou (opačnou, ostrou opačnou) nerovností, nazveme ji ryze konvexní (konkávní, ryze konkávní) na I .

Věta 107. Buď f na I konvexní. Pak

1. má jednostranné derivace v každém $x \in I$, němž má smysl, tj. $\exists f'_-(x)$ ($f'_+(x)$) v každém $x \in I$, který není levý (pravý) krajní. Přitom je $f'_-(x)$ ($f'_+(x)$) konečná v každém x , který není levým (pravým) krajním v I ; je tedy f v každém takovém x spojitá zleva (zprava) a tak je spojitá v každém $x \in I$, jenž není krajním.
2. Pro $a, b \in I$, $a < b$ je $f'_+(a) \leq f'_-(b)$.
3. Funkce $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$ na I neklesá, takže existuje-li f' na intervalu $J \subset I$ tak f' neklesá na J .
4. $f'_-(a) \leq f'_+(b) \forall x \in I$ který není krajní. Množina $D = \{x \in I | f'(x) \text{ neexistuje}\}$ je spočetná.

Toto tvrzení platí pro konkávní funkce na I , v B, C, D se jen obrátí nerovnosti a slova neklesá nahradíme slovy neroste.

Důkaz.

1. Buď $a \in I$, který není pravý krajní. Pak $\exists \delta > 0$, že $a + \delta \in I$ a na $(a, a + \delta)$ funkce $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ neklesá (konvexnost f), takže existuje $\varphi(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a)$.
Není-li a ani levý krajní, existuje $b \in I$, $b < a$, a je $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \varphi(x) \leq \frac{f(a + \delta) - f(a)}{(a + \delta) - a}$ pro $a < x < a + \delta$, odkud $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq f'_+(a) \leq \frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta}$, takže $f'_+(a)$ je konečná, tudíž je f v a zprava spojitá.
2. Je-li $a, b \in I$, $a < b$, pak pro všechny $y, z \in (a, b)$, $y < z$ je

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(z) - f(b)}{z - b}$$

Odtud limita $\lim_{y \rightarrow a+}$ při pevném z dává $f'_+(a) \leq \frac{f(z) - f(b)}{z - b} \forall z \in (a, b)$ a pak limita $z \rightarrow b-$ dává $f'_+(a) \leq f'_-(b)$.

3. Je-li $a, b \in I$, $a < b$, je $f'_+(a) \leq f'_-(b) \leq f'_+(b)$ (první nerovnost podle druhého bodu a z následujícího bodu)

4. Je-li $x < b < y$, je $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$, zde $\lim_{x \rightarrow b-}$ dá $f'_-(b) \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$ a zde $\lim_{y \rightarrow b+}$ dá $f'_-(b) \leq f'_+(b)$. Dále jestli pro $a \in I$, který není krajní, neexistuje derivace, je $f'_-(a) < f'_+(a)$. Lze proto každému takovému a přiřadit neprázdný interval $I_a = (f'_-(a), f'_+(a))$.

Přitom jsou-li a, b dva takové body, je $f_+(a) \leq f_-(b)$ podle bodu 2, takže $f'_-(a) < f'_+(a) \leq f'_-(b) < f'_+(b)$, takže $I_a \cap I_b = \emptyset$. Zvolíme-li v každém I_a racionální číslo a označíme $\psi(a)$, je pak ψ prosté zobrazení D do množiny \mathbb{Q} racionálních čísel a tak je D spočetná.

Je-li f na I konkávní, je $-f$ na I konvexní a tak tvrzení pro konkávní funkce plyne použitím věty na $-f$. \square

Věta 108. *Bud' f na intervalu I konvexní, $a, b \in I$, $a < b$ a nechť b není pravý krajní. Je-li $f(a) \leq f(b)$, pak f neklesá na intervalu $J = (b, \infty) \cap I$.*

Důkaz. Pro $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ježto je $b > a$, $f(b) \geq f(a)$, je levý a tak i pravý zlomek nezáporný, takže i $f(x_2) \geq f(x_1)$. \square

Důsledek 109. Konvexní f na (a, b) ($a < b \leq \infty$) buď klesá, nebo existuje $c \in (a, b)$, že na (c, b) neklesá. V obou případech existuje $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ a ta není $-\infty$ je-li $b < \infty$.

Důkaz. Jestli f na (a, b) klesá, tvrzení platí. Jinak $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$, že $f(x_1) \leq f(x_2)$ a podle věty 108 použité na $I = \langle x_1, b \rangle$ f na (x_2, b) neklesá.

Je-li $b < \infty$, zvolme $p, q \in (a, b)$, $p < q$. Pak $\frac{f(q)-f(p)}{q-p} \leq \varphi(x) = \frac{f(x)-f(q)}{x-q}$, $x > q$, odkud

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} (x-q) \leq \varphi(x) (x-q) = f(x) - f(q) \text{ na } (q, b) \quad (8.2)$$

Protože na (q, b) neklesá, má limitu a ježto $\lim_{x \rightarrow b-} (x-q) = b-q$ je konečná, má ji i $\varphi(x) (x-q)$, tj. $f(x) - f(q)$ a (8.2) dává: $\frac{f(q)-f(p)}{q-p} (b-q) \leq \lim_{x \rightarrow b-} (f(x) - f(q))$ odkud $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} (f(x) - f(q)) + f(q) > -\infty$. \square

Věta 110. *Konvexní f na I může mít ostré lokální maximum nejvýše v případných krajních bodech.*

Důkaz. Je-li v $c \in I$ ostré lokální maximum a c není krajní, je $\delta > 0$, že $f(y) < f(c)$, $f(z) < f(c)$ $\forall y, z$, $c - \delta < y < c < z < c + \delta$, načež $\frac{f(c)-f(y)}{c-y} \leq \frac{f(z)-f(c)}{z-c}$ (z konvexnosti), ale levý zlomek je nezáporný a pravý záporný, což je spor. \square

Věta 111. *Konvexní funkce f má na I nejvýše jedno ostré lokální minimum. Má-li je, je minimem globálním.*

Důkaz. Měj f v $a, b \in I$ ostré lokální minimum pro $a \neq b$ a buď třeba $a < b$. Pak existuje $\delta > 0$, že $f(a) < f(x) \forall a < x < a + \delta$, $f(b) < f(y) \forall b < y < b + \delta$. Načež (z konvexnosti) víme, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(y)}{b-y}$, ale zlomek vlevo je kladný a zpravo záporný. To je spor.

Má-li funkce v $c \in I$ ostré lokální minimum, existuje $\delta > 0$, že

$$f(c) < f(x) \quad \forall x \in [(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)] \cap I \quad (8.3)$$

Zvolme $b \in (c, c + \delta) \cap I$, takže $f(c) < f(b)$. Podle věty 108 f neklesá na $\langle a, b \rangle \cap I$. Je-li tedy $x \in (c, \infty)$, je buďto $c < x \leq b$ a tedy $f(c) < f(x)$ podle (8.3), nebo je $b < x$ a tak $f(c) < f(b) \leq f(x)$, takže $f(c) < f(x) \forall x \in I, x > c$.

Je-li c levý krajní v I , je tedy $f(c)$ nejmenší hodnotou f na I . Nemí-li, předpokládejme, že pro nějaké $c' \in I$, $c' < c$, je $f(c') \leq f(c)$. Pak je $c' \leq c - \delta$. Zvolme $x_1 \in I$ aby $c - \delta < x_1 < c$, $c' < x_1$.

Pak je $f(c) < f(x_1)$ podle (8.3) a $0 \leq \frac{f(c)-f(c')}{c-c'} \leq \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} < 0$, ale to je spor.

Je tedy $f(x) > f(c) \forall x \in I, x < c$ a tak je $f(c) = \min_{x \in I} f(x)$. \square

Věta 112. Je-li f konvexní na $I \subset \mathbb{R}$ a $f'(c) = 0$ (pro krajní body se opět míní příslušná jednostranná derivace), nabývá $f(c)$ své nejmenší hodnoty na I .

Pro konkávní f platí totéž, jen tentokrát je $f(c) = \max_{x \in I} f(x)$.

Důkaz. Není-li $c \in I$ pravý (levý) krajní, pak funkce $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ na $I^+ = (c, \infty) \cap I$ ($I^- = (-\infty, c) \cap I$) neklesá, takže $0 = f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \varphi(x) = \inf_{x \in I^+} \varphi(x)$ ($0 = f'_-(c) = \varphi(c-) = \sup_{x \in I^-} \varphi(x)$). Tudíž $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ (≤ 0) na I^+ (I^-), kde však $x - c > 0$ ($x - c < 0$) a tak $f(x) \geq f(c)$ $\forall x \in I$. \square

Věta 113. Bud' f funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ pro vlastnosti

A $f''(x) > 0$ (≥ 0 , < 0 , ≤ 0) na I ,

B f' na I roste (neklesá, klesá, neroste),

C f je na I ryze konvexní (konvexní, ryze konkávní, konkávní)

platí $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.

Důkaz.

$A \Rightarrow B$: Použije se důsledek 90 na f' .

$B \Rightarrow C$: Je-li $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, je podle věty 88

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d)$$

kde $x_1 < c < x_2 < d < x_3$. Protože $f'(c) < f'(d)$ je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (respektive obdobně pro $\leq, >, \geq$). \square

Definice 114.

A. Bod $a \in \mathbb{R}$ nazveme inflexním bodem funkce f , jestli

(a) f je spojitá,

(b) existuje $f'(a)$ a je-li konečná, pak

$$\exists \delta > 0, \text{ že } f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a) \quad (\geq) \quad \forall a - \delta < x < a, \text{ a}$$

$$\exists \delta > 0, \text{ že } f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a) \quad (\leq) \quad \forall a < x < a + \delta$$

tj. f je na $(a - \delta, a)$ pod (nad) a na $(a, a + \delta)$ nad (pod) tečnou grafu f v $[a, f(a)]$.

B. Bod $a \in \mathbb{R}$ nazveme silně inflexním bodem funkce f , jestli

(a) f je v a spojitá,

(b) existuje $f'(a)$,

(c) existuje $\delta > 0$, že je f konkávní (konvexní) na $(a - \delta, a)$ a konvexní (konkávní) na $(a, a + \delta)$

Věta 115. Každý silně inflexní bod funkce f je taky inflexní.

Důkaz. Bud' f v a spojitá, měj $f'(a)$ a bud' třeba na $(a - \delta, a)$ konkávní a na $(a, a + \delta)$ konvexní, $\delta > 0$. Pak $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ na $(a - \delta, a)$ neroste, na $(a, a + \delta)$ neklesá a tak $\varphi(x) \geq \varphi(a-) = f'_-(a) (= f'(a))$ pro $x \in (a - \delta, a)$, $\varphi(x) \geq \varphi(a+) = f'_+(a) = f'(a)$ pro $x \in (a, a + \delta)$, tj. na $(a - \delta, a)$ je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > f'(a)$, odkud $f(x) = f(a) < f'(a)(x-a)$, tj. $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$, na $(a, a + \delta)$ je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f'(a)$ odkud $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$. \square

Věta 116. Je-li $f''(a) \neq 0$, není a pro f inflexní.

Důkaz. Buď třeba $f''(a) > 0$. Podle věty 81 f' roste, existuje tedy

$$\delta > 0, \text{ že } f'(x) < f'(a) < f'(y) \quad \forall x, y, a - \delta < x < a < y < a + \delta$$

Podle věty 88 tedy je $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$, kde $x < c < a$, je tedy $a - \delta < c < a$ a tak $f'(c) < f'(a)$, načež $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) < f'(a)(x - a)$, tj. $f(x) < f'(a)(x - a) + f(a)$.

Analogicky pro $f(y) - f(a) = f'(d)(y - a)$, kde $a < d < y$, je tedy $a < d < a + \delta$ a tak $f'(a) < f'(d)$, načež $f(y) - f(a) = f'(d)(y - a) > f'(a)(y - a)$, tj. $f(y) > f'(a)(y - a) + f(a)$. \square

Důsledek 117. Je-li $a \in \mathbb{R}$ pro f inflexní a existuje $f''(a)$, je $f''(a) = 0$. Inflexní body funkce f mohou být jen tam, kde je 2. derivace nulová, nebo kde není.

Kapitola 9

Průběh funkce

Věta 118. *Nechť existuje $f'(x)$ na $U(a)$, $f'(a) = 0$.*

1. *Jestli f' mění znaménko, tj. $\exists \delta > 0$, že $f' \leq 0$ (≥ 0) na $(a - \delta, a)$ a $f' \geq 0$ (≤ 0) na $(a, a + \delta)$, má f v a extrém a sice lokální minimum (maximum). Při ostrých nerovnostech je příslušný extrém ostrý.*
2. *Jestli má f stejné znaménko na obou stranách bodu a , tj. $f' > 0$ (< 0) na $(a - \delta, a)$ i $(a, a + \delta)$, f v a roste (klesá) a tak f v a extrém nemá.*

Důkaz. Je-li třeba $f'(a) < 0$ na $(a - \delta, a)$, $f' > 0$ na $(a, a + \delta)$. Podle věty 81 f na $(a - \delta, a)$ klesá, na $(a, a + \delta)$ roste, f je v a spojitá ($f'(a) = 0$, tedy je konečná) a je-li $a - \delta < u < v < w < a$, je $f(u) > f(v) > f(w)$, odkud limitou $w \rightarrow a-$ plyne $f(u) > f(v) \geq f(a-) = f(a)$.

Je-li však třeba $f' < 0$ na $(a - \delta, a)$ i na $(a, a + \delta)$, pak $f(u) > f(a) \forall u \in (a - \delta, a)$ jak výše dokázáno, ale také obdobně $f(a) > f(u) \forall u \in (a, a + \delta)$ a tak f v a extrém nemá. \square

Věta 119. *Je-li $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, má f v a ostrý extrém a sice min. (max.) je-li $f''(a) > 0$ (< 0).*

Důkaz. Je-li třeba $f''(a) > 0$, tak f' v a roste, takže existuje $\delta > 0$, že $f'(x) < f'(a) = 0$ na $(a - \delta, a)$ a $f'(x) > f'(a) = 0$ na $(a, a + \delta)$ a viz větu 118.1. \square

Věta 120. *Pro $n \geq 1$, $1 \leq k < n$ buď $f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ (tj. $f^{(n)}(a) = 0$ a pro $n > 1$ buď $f^{(k)}(a) = 0 \forall 1 \leq k < n$). Pak*

1. *pro sudé n a $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) má f v a ostré lokální minimum (maximum),*
2. *pro liché n v a nemá extrém; při $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) f v a roste (klesá)*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $a = 1$ (2) to je věta 81 (119).

Nechť tvrzení platí pro $n \geq 2$. a buď $f^{(k)}(a) = 0$ pro $1 \leq k < n$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, třeba $f^{(n+1)}(a) > 0$. Pak je funkce $g(x) = f'(x)$ splňuje požadavky věty pro n , takže

1. *pro sudé (liché) $n + 1$ je n liché (sudé) a tak g v a roste (má tam ostré minimum), existuje tedy $\delta > 0$, že $g(x) < g(a)$ na $(a - \delta, a)$, $g(x) > g(a)$ na $(a, a + \delta)$ ($g(x) > g(a)$ na $(a - \delta, a)$ i $(a, a + \delta)$). Je tedy $f'(x) < f'(a) = 0$ na $(a - \delta, a)$, $f'(x) > f'(a)$ ($f'(x) < f'(a)$) na $(a, a + \delta)$ a viz větu 118.2 (118.1).*

\square

Věta 121. *Pro $1 < k < n$ buď $f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Je-li n liché (sudé), má (nemá) f v a inflexní bod.*

Důkaz. Buď $[x, f(x)]$ je nad či pod tečnou

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad (9.1)$$

právě když je $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$ kladné či záporné. Je $g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0$ a buď třeba $f^{(n)}(a) > 0$ takže pak je $g^{(n)}(a) > 0$ a podle věty 120 má funkce g

1. pro sudé n ostré lokální minimum, tj. existuje $\delta > 0$, že $g(x) > g(a) = 0$ na $(a - \delta, a)$ a $(a, a + \delta)$, tedy a není inflexní.
2. pro liché n g v a podle věty 120.2 roste, tj. existuje $\delta > 0$, že $g(x) < g(a) = 0$ na $(a - \delta, a)$, $g(x) > g(a) = 0$ na $(a, a + \delta)$, takže $[x, f(x)]$ je pro $x \in (a - \delta, a)$ pod, ale pro $x \in (a, a + \delta)$ nad tečnou (podle (9.1)), tedy a je inflexní.

□

Věta 122. Je-li $f'(a) = 0$, $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) na okolí bodu a , je v a lokální minimum (maximum).

Důkaz. Podle věty 113 je f na okolí bodu a konvexní (konkávní) a tak na něm má podle věty 112 minimum (maximum). □

Definice 123. Buď f dána na intervalu (a, ∞) ($(-\infty, b)$). Přímkou $y = kx + q$ nazveme její pravou (levou) asymptotou, nebo taky asymptotou u ∞ (u $-\infty$) jestli $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx + q| = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - kx + q| = 0$).

Někdy se za asymptotu považuje ještě přímka $x = a$, je-li f dána na nějakém $(a - \delta, a)$ nebo $(a, a + \delta)$ a $f(a-) = \pm\infty$, nebo $f(a+) = \pm\infty$.

Věta 124. f má pravou asymptotu právě když platí: existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ a označíme ji k , existuje konečná $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Je-li podmínka splněna a označíme-li druhou z limit q , je $y = kx + q$ pravou asymptotou. (Má tedy f nejvýš jednu pravou asymptotu.)

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, pak existuje i $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ a rovná se jí, takže je-li konečná, je $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

Stejně tvrzení (s limitami u $-\infty$) platí pro levou asymptotu.

Důkaz. Důkaz implikace \Rightarrow : je-li $y = kx + q$ asymptota u ∞ , je $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - q| = 0$, takže $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - kx - q|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right|$ odkud $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0$, takže $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) + k = k$. Dále je $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - q) = 0$, takže $f(x) - kx = (f(x) - kx - q) + q = q$, odkud $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = q$.

Důkaz opačné implikace \Leftarrow : existuje-li konečná $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ a položíme $y = kx + q$, je $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - q| = 0$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ a rovná se jí (věta 92), takže je-li konečná, je $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ □

Věta 125. Buď g derivací spojitě funkce na intervalu I . Je-li monotónní, tak je spojitá.

Důkaz. Buď bod $a \in I$, který není pravý krajní a buď $g = f'$ na I . Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ (f' je monotónní) a je $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Je tedy $g = f'$ v a spojitá zprava. Obdobně se ukáže, že je v a spojitá zleva (není-li a levý krajní) tak je v a spojitá. □

Poznámka 126 (Průběh funkce). Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme po následujících bodech:

1. Určíme definiční obor,
2. skládá-li se D_f z více intervalů, spočteme příslušné jednostranné limity u každého z jejich krajních bodů, který nepatří do D_f , včetně případných limit v nevlastních bodech $\pm\infty$,

3. f' : najdeme stacionární body, intervaly monotónie (podle věty 90) a body, kde f nemá derivaci; zjistíme, kde jsou extrémy a jaké
4. f'' : najdeme body, které mohou být inflexní a intervaly konkávnosti a konvexnosti (věta 113)
5. najdeme případné asymptoty
6. nakreslíme graf

Máme-li zkoumat celkové extrémy spojitě funkce na $\langle a, b \rangle$, stačí srovnat její hodnoty ve všech případných stacionárních bodech, v bodech, kde případně nemá derivaci a v bodech a a b . Kde je hodnota největší (nejmenší), je globální maximum (minimum) funkce f na $\langle a, b \rangle$.

Kapitola 10

Řady

Definice 127. Součtem členů posloupnosti a_n se rozumí limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, kde $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ je takzvaný n -tý částečný součet členů posloupnosti. Pokud tato limita existuje. Označíme-li ji v takovém případě s , píšeme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; místo součet (n . částečný součet) členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zvykem říkat součet (n . částečný součet) řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li konečný, říkáme, že řada konverguje, jinak diverguje; zde ještě rozeznáváme divergence k ∞ ($-\infty$) jestli $s = \infty$ ($-\infty$) a jestli $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, říká se, že řada nemá součet, nebo že osciluje.

Věta 128 (Nutná podmínka konvergence). Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $a_n \rightarrow 0$.

Důkaz. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0$. □

Věta 129 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence řad). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq k$$

kterážto podmínka je rovnocenná podmínce

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_{k+1} + \dots + a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$$

Důkaz. Použití Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů (věta 31). □

Příklad 130. Harmonická řada $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})$ konverguje k nekonečnu.

Důkaz.

$$\left| \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2^{n+1} - 2^n) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Protože toto platí $\forall n$, tak podle BC podmínky řada diverguje. □

Věta 131 (Srovnávací příznak (kritérium) pro řady s nezápornými členy). Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existuje $l \in \mathbb{N}$, že $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq l$. Pak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (či naopak, diverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

Důkaz. Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak podle věty 129

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |b_m + \dots + b_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq k \quad (10.1)$$

lze brát $k \geq l$. Ukážeme, že podmínku věty 129 splňuje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bud' tedy $\varepsilon > 0$. Vezměme k němu k podle (10.1). Pro $m, n \geq k$ pak je $|a_m + \dots + a_n| = a_m + \dots + a_n \leq b_m + \dots + b_n = |b_m + \dots + b_n| < \varepsilon$ podle (10.1). \square

Důsledek 132 (tzv. odmocninový či Cauchyův příznak).

A Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy $\exists k \in \mathbb{N}, q \in (0, 1)$, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq k$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestli $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje ($k \infty$).

B (limitní podoba) Jestli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ (> 1), řada konverguje (diverguje).

Důkaz.

A Z $\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq k$ plyne, že $a_n < q^n \quad \forall n \geq k$ a geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ při $0 \leq q < 1$ konverguje, takže podle věty 131 totéž platí pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n , je $a_n \geq 1$ pro tyto n a tak nejde $a_n \rightarrow 0$, proto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůže podle věty 128 konvergovat.

B Je-li $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, zvolme q , aby $l < q < 1$. Pak existuje k , že $\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq k$ a případ A dává konvergenci.

Je-li $l > 1$, existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \forall n \geq k$ a bod A dává divergenci. \square

Věta 133 (tzv. podílový srovnávací příznak konvergence řad s kladnými členy). Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existuje $l \in \mathbb{N}$, že $a_n, b_n > 0$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq l$. Pak jestli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a naopak, jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

Důkaz. Pro $n \geq l$ je

$$\frac{a_n}{a_l} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{l+1}}{a_l} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \dots \frac{b_{l+1}}{b_l} = \frac{b_n}{b_l}$$

odkud $a_n \leq \frac{a_l}{b_l} b_n$ a z konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne totéž pro $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_l}{b_l} b_n$ a tak i pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podle věty 131. \square

Důsledek 134 (tzv. d'Alembertův podílový příznak).

A Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy je $k \in \mathbb{N}, q \in (0, 1)$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq k$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje; jestli je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq k$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

B (limitní tvar) Jestli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (> 1), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

Důkaz.

A Použije se věta 133 na $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Ta druhá při $q \in (0, 1)$ konverguje.

Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \geq k$, je $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_k \ \forall n \geq k$ a tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ a viz větu 128.

B Jestli $l = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, zvolme q , aby $l < q < 1$. Pak $\exists k \in \mathbb{N}$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \forall n \geq k$ a bod A dává konvergenci.

Je-li $l > 1$, existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \ \forall n \geq k$ a viz bod A.

□

Věta 135 (Kummerův příznak). Pro posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ nechť je $l \in \mathbb{N}$, že $a_n > 0$, $c_n > 0 \ \forall n \geq l$. Položíme

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \quad \text{pro } n \geq l \quad (10.2)$$

A Jestli existuje $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, že $K_n \geq \delta \ \forall n \geq k$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

B Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ diverguje a existuje $k \in \mathbb{N}$, že $K_n \leq 0 \ \forall n \geq k$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Limitní tvar: Jestli $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n > 0$ (< 0), tak řada konverguje (diverguje).

Důkaz.

A Z $K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta$ pro $n \geq k, l$ plyne

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} \quad (10.3)$$

takže $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$, tj. $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$ a tak $\{c_n a_n\}$ klesá, má tedy konečnou limitu L .

Pro částečné součty σ_n řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}) \quad (10.4)$$

je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(c_1 a_1 - c_2 a_2) + (c_2 a_2 - c_3 a_3) + \dots + (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}] = c_1 a_1 - L \end{aligned}$$

a tak řada (10.4), načež podle (10.3) a věty 131 i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

B Z $K_n \leq 0$ plyne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$$

a tak divergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ dává podle věty 133 totéž pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Limitní podoba stejné jako u vět 132 a 134.

□

Důsledek 136.

1. Položíme ve větě 135 $c_n = 1$, dostáváme podílový příznak z věty 134.

2. Položíme-li $c_n = n$, dostáváme tzv. Raabeho příznak:

A Existuje-li $k \in \mathbb{N}$, $q < 1$, že $n \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) \geq q \quad \forall n \geq k$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li $n \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \forall n \geq l$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

B (limitní tvar) Jestli $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) > 1$ (< 1), řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

3. Položíme-li $c_n = n \ln n$, dostáváme tzv. Bertrandův příznak:

jestli $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1$ (< 1), řada konverguje (diverguje).

Důkaz. 1 a 2 plyne ihned z věty 135, limitní tvary obdobně jako v důkazu vět 132 a 134. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje).

Třetí bod: $c_n = n \ln n$ vyhovuje předpokladům věty 135 a tak

$$\begin{aligned} K_n &= c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln (n+1) = \\ &= n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \ln n + n \ln n - (n+1) \ln (n+1) = \\ &= n \ln n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) + n \ln n - (n+1) \ln (n+1) = \\ &= n \ln n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - \ln n + \ln n + n \ln n - (n+1) \ln (n+1) = \\ &= n \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

takže $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - 1$ a věta 135 dává tvrzení. (divergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ dodečně v příkladu) \square

Věta 137 (Gaussův příznak). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ měj kladné členy a necht' existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad \forall n \geq k$, $\lambda, \mu > 0$ a $\{\theta_n\}$ je omezená ($\theta_n \leq L \quad \forall n \geq l$).

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje je-li $\lambda > 1$, nebo $\lambda = 1$ a $\mu > 1$. Diverguje při $\lambda < 1$ nebo $\lambda = 1$ a $\mu \leq 1$.

Důkaz. $\lambda < 1$ ($\lambda > 1$) – věta 133, protože pak je limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$. Bud' $\lambda = 1$, pak $R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \mu$ a tak případy $\mu > 1$ ($\mu < 1$) dává důsledek 136.2 (Raabe). Při $\mu = 1$ je $B_n = \ln n (R_n - 1) = \frac{\ln n}{n} \cdot \theta_n$ a tak $B_n \rightarrow 0$ a odpověď dává důsledek 136.3. \square

Věta 138. Bud' $n_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupností přirozených čísel. Pro posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ položme $b_n = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ ($= a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$).

A Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$.

B Jestli je $a_n \geq 0$ (≤ 0) od nějakého $l \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ právě když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$.

Důkaz.

A Posloupnost $\{\sigma_n\}$ částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je vybraná z $\{s_n\}$, takže podle věty 23 jestli $s_n \rightarrow s$, tak i $\sigma_n \rightarrow s$.

B Zde je $\{s_n\}$ i $\{\sigma_n\}$ monotónní od l a tak mají limitu; označíme je s a σ . Podle věty 23 je $s = \sigma$. □

Věta 139 (tzv. kondenzační příznak konvergence). *Nechť existuje $l \in \mathbb{N}$, že $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \forall n \geq l$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ je (s_n) je částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\frac{1}{2} 2^{n+1} \cdot a_{2^{n+1}} \leq s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n} \quad (10.5)$$

Proto $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} (s_{2^{n+1}} - s_{2^n})$, která podle věty 138B konverguje právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Příklad 140. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje.

Důkaz. $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ vyhovuje požadavkům věty 139 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$$

diverguje (příklad 130). □

Řady s nestejnými znaménky

Definice 141. Variací posloupnosti $\{a_n\}$ se rozumí číslo $\text{var}\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$. Je-li konečná, říkáme, že posloupnost má konečnou variaci.

Tvrzení 142.

A Monotónní a omezená posloupnost má konečnou variaci.

B Má-li $\{a_n\}$ konečnou variaci, je omezená.

Důkaz.

A Nechť $\{a_n\}$ třeba neklesá, $a_n \leq K$. Pak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 \leq K - a_1 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| &\leq K - a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \quad a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \text{ a tak } |a_n| \leq |a_n - a_{n-1}| + \cdots + \\ &|a_2 - a_1| + |a_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| + |a_1| = \text{var}\{a_1\} + |a_1|. \end{aligned}$$

□

Lemma 143 (Abelova parciální sumace). Pro $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, ($n > 1$) buď $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$. Pak je

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_n b_n &= a_1 \cdot b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + (s_3 - s_2) b_3 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n = \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \end{aligned}$$

Věta 144 (Abel-Dirichletův příznak konvergence). Posloupnost $\{b_n\}$ měj konečnou variaci (třeba buď monotónní a omezená), $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje jestli

A Buďto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (Abellův příznak), nebo

B $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a $b_n \rightarrow 0$ (Dirichletův příznak).

Důkaz. Ukážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje BC podmínku věty 129. Pro $k, p \in \mathbb{N}$, položíme $\sigma_{k,p} = \sum_{l=1}^p a_{k+l}$. Podle tvrzení 143 je

$$|a_{k+1} b_{k+1} + \cdots + a_{k+p} b_{k+p}| = |\sigma_{k,1} (b_{k+1} - b_{k+2}) + \cdots + \sigma_{k,p-1} (b_{k+p-1} - b_{k+p}) + \sigma_{k,p} b_{k+p}| \quad (10.6)$$

A Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$) konverguje, existuje podle věty 129 $r \in \mathbb{N}$ ($s \in \mathbb{N}$), že

$$|\sigma_{r,p}| = \left| \sum_{l=1}^p a_{r+l} \right| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (10.7)$$

$$\left(\sum_{n=p}^q |b_n - b_{n+1}| < \varepsilon \quad \forall p, q \geq s \right) \quad (10.8)$$

Navíc je $\{b_n\}$ podle tvrzení 142B omezená, třeba $|b_n| \leq K$. Pro $k = \max(r, s)$ pak je podle (10.6)

$$\begin{aligned} &|a_{k+1} b_{k+1} + \cdots + a_{k+p} b_{k+p}| \leq \\ &\leq |\sigma_{k,1}| |b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |\sigma_{k,p-1}| |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |\sigma_{k,p}| |b_{k+p}| < \\ &< \varepsilon (|b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |b_{k+p}|) < \\ &< \varepsilon (\varepsilon + K) < \varepsilon (1 + K) \end{aligned}$$

B Pro $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ buď $|s_n| \leq K \quad \forall n$, pak je $|\sigma_{k,p}| = |s_{k+p} - s_k| \leq |s_{k+p}| + |s_k| \leq 2K \quad \forall k, p$.

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ konverguje ($b_n \rightarrow 0$), je podle věty 129 $s \in \mathbb{N}$ ($r \in \mathbb{N}$), že platí (10.8) ($|b_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq r$). Pro $k = \max(r, s)$ pak je podle (10.6)

$$\begin{aligned} &|a_{k+1} b_{k+1} + \cdots + a_{k+p} b_{k+p}| \leq \\ &\leq |\sigma_{k,1}| |b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |\sigma_{k,p-1}| |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |\sigma_{k,p}| |b_{k+p}| < \\ &< 2K (|b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |b_{k+p}|) < \\ &< 2K \cdot 2\varepsilon = 4K\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

Důsledek 145 (Leibnitzův příznak). Bud' $0 \leq b_{n+1} \leq b_n \forall n$ od nějakého $l \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje právě tehdy když $b_n \rightarrow 0$.

Důkaz. Jestli $b_n \rightarrow 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ a $\{b_n\}$ splňují podmínky věty 144B a tak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje.

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje, tak $(-1)^{n+1} b_n \rightarrow 0$ a tak $b_n \rightarrow 0$. □

Absolutní konvergence

Definice 146. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme absolutně konvergentní jestli konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 147. Absolutně konvergentní řada konverguje.

Důkaz. Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, tak podle věty 129 splňuje BC podmínku, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } \left| \sum_{l=k+1}^p |a_l| \right| = \sum_{l=k+1}^p |a_l| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (10.9)$$

Bud' $\varepsilon > 0$; najdeme $k \in \mathbb{N}$, aby platilo (10.9). Pro $p \in \mathbb{N}$ pak je

$$|a_{k+1} + \dots + a_{k+p}| \leq |a_{k+1}| + \dots + |a_{k+p}| < \varepsilon$$

což bylo dokázat. □

Příklad 148. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje, ale ne absolutně.

Poznámka 149. $\{a_{k(n)}\}$ ($\{a_{z(n)}\}$) bud' vybraná posloupnost nezáporných (záporných) členů posloupnosti $\{a_n\}$. Pak nastává jediný z těchto případů:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)}$ konverguje – pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)}$ konverguje – pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$ – pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, nastává čtvrtá možnost.

Definice 150. Bud' p prosté zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ vznikne z řady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnáním.

Věta 151. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konverguje, $s \in \mathbb{R}^*$. Pak je přerovnání p množiny \mathbb{N} , že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s.$$

Důkaz. Bud' $\{a_{k(n)}\}$ a $\{a_{z(n)}\}$ vybrané posloupnosti všech nezáporných (záporných) členů posloupnosti $\{a_n\}$; je

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$

Bud' n_1 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_1 = a_{k(1)} + \dots + a_{k(n)} > s$,
 n_2 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_2 = \sigma_1 + a_{z(1)} + \dots + a_{z(n)} < s$,
 n_3 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_3 = \sigma_2 + a_{k(n_1+1)} + \dots + a_{k(n)} > s$,
 n_4 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_4 = \sigma_3 + a_{z(n_2+1)} + \dots + a_{z(n)} < s$,
 \dots

Bud' $n : 1, 2, \dots, n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2, n_2 + 1, \dots, n_3, n_3 + 1, \dots, n_4, n_4 + 1, \dots$

$p(n) : k(1), k(2), \dots, k(n_1), z(1), z(2), \dots, z(n_2), k(n_1) + 1, \dots, k(n_3), z(n_2) + 1, \dots, z(n_4), k(n_3) + 1, \dots$

Zobrazení p je prosté a zobrazuje \mathbb{N} na \mathbb{N} , takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ vznikla přerovnáním z $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $a_n \rightarrow 0$, tudíž existuje $d \in \mathbb{N}$, že $|a_d| < \varepsilon \forall n \geq d$. Bud' $t' \in \mathbb{N}$ takové, že $\{p(1), \dots, p(t' - 1)\}$ obsahuje všechna čísla $1, \dots, d$. Je-li tedy $n \geq d$, je $p(n) \geq d$ a tak $a_{p(n)} < \varepsilon \forall n \geq t'$.

Zvolme ještě t' tak velké, aby $p(t') = n_{2l}$. Pak je navíc $a_{p(t')} = a_{k(2l+1)}$ a součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ až po

tento index je větší než s , ale protože je $a_{p(t')} < \varepsilon$, je $s < \sum_{n=1}^{t'} a_{p(n)} < s + \varepsilon$.

Bud' $t > t'$ takové, aby $p(t) = a_{p(2k)}$. Pak je ještě $a_{p(t)} = a_{z(2l)} < s$, ale protože je $a_{p(t)} > -\varepsilon$, je $\sum_{n=1}^t a_{p(n)} > s - \varepsilon$. Pro $n \geq t$ pak je $s - \varepsilon < \sum_{n=1}^t a_{p(n)} < \sum_{k=1}^n a_{p(k)} < \sum_{n=1}^{t'} a_{p(n)} < s + \varepsilon$.

Bud' n_1 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_1 = a_{k(1)} + \dots + a_{k(n)} > 1$,
 n_2 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_2 = \sigma_1 + a_{z(1)} + \dots + a_{z(n)} < 1$,
 n_3 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_3 = \sigma_2 + a_{k(n_1+1)} + \dots + a_{k(n)} > 2$,
 n_4 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_4 = \sigma_3 + a_{z(n_2+1)} + \dots + a_{z(n)} < 2$,
 \dots

□

Věta 152. *Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ z ní vzniklá přerovnáním také absolutně konverguje a ke stejnému součtu.*

Důkaz. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a tak splňuje BC podmínku

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_{k+1}| + \dots + |a_{k+p}| < \varepsilon \forall p \in \mathbb{N} \quad (10.10)$$

Bud' $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_{p(k)}$; ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - \sigma_n) = 0$, takže následující limita $\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n + (\sigma_n - s_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Bud' $\varepsilon > 0$, najdeme k podle (10.10) a zvolme $l \in \mathbb{N}$ tak velké, aby mezi $a_{p(1)}, \dots, a_{p(l)}$ byly všechny členy a_1, \dots, a_k . Pro $n \geq l$ se pak v $s_n - \sigma_n$ všechny členy a_1, \dots, a_k vyruší a zůstanou jen členy a_{v_1}, \dots, a_{v_s} .

$v_1, \dots, v_s \geq k$, takže existuje $p \in \mathbb{N}$, že mezi $k+1, \dots, k+p$ jsou všechny v_1, \dots, v_s , načtež $|s_n - \sigma_n| = |a_{v_1} + \dots + a_{v_s}| \leq |a_{v_1}| + \dots + |a_{v_s}| \leq |a_{k+1}| + \dots + |a_{k+p}| < \varepsilon$ podle (10.10). \square

Důsledek 153. Řada konverguje ke stejnému součtu při každém přerovnání právě když absolutně konverguje.

Důkaz. \Leftarrow podle věty 152, \Rightarrow věta 151. \square

Definice 154. Buď a zobrazení spočetné množiny S do \mathbb{R} (\mathbb{C}), buď $s : \mathbb{N} \rightarrow S$ prosté zobrazení \mathbb{N} na S (takže $s(1), s(2), \dots$ je uspořádání S do posloupnosti).

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ absolutně konverguje, tak (absolutně) konverguje pro každé takové s k témuž součtu σ , jenž nazveme součtem zobecněné řady $\sum_{s \in S} a(s)$ (a píšeme $\sigma = \sum_{s \in S} a(s)$).

Věta 155. Buď $\sum_{s \in S} a(s)$ absolutně konvergentní zobrazení řady se součtem σ , \mathcal{F} buď spočetná a disjunktní soustava podmnožin S (tj. $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$) taková, že $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{F | F \in \mathcal{F}\} = S$. Pak

1. $\forall F \in \mathcal{F}$ zobecněná řada $\sum_{s \in F} a(s)$ absolutně konverguje
2. označíme-li $\sigma_F = \sum_{s \in F} a(s)$, pak zobecněná řada $\sum_{F \in \mathcal{F}} \sigma_F$ absolutně konverguje
3. $\sum_{F \in \mathcal{F}} \sigma_F = \sigma$

Důkaz. Buď $\langle s(n) \rangle_{n=1}^{\infty}$ nějaké uspořádání S do posloupnosti. To uspořádává d posloupnosti každou $A \subset S$: buď n_1 první $n \in \mathbb{N}$, že $s(n) \in A$, n_2 první $n \in \mathbb{N}$, že $s(n) \in A - \{n_1\}$, n_3 první $n \in \mathbb{N}$, že $s(n) \in A - \{n_1, n_2\}$, \dots

$\{s(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je uspořádání A do posloupnosti, vytvořené uspořádáním s ; označme je $\{s^A(k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Je-li $A \subset B \subset S$ pak uspořádání s^B v B vytvoří takto též uspořádání její podmnožiny A – označme je $(s^B)^A$ (tj. $\{(s^B)^A(n)\}_{n=1}^{\infty}$). Je tedy v A uspořádání s^A a $(s^B)^A$. Očividně je $(s^B)^A = s^A$.

1. Je-li $G \subset S$, ukážeme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_{s^G(k)}$ absolutně konverguje. Je-li $t \in \mathbb{N}$, je $\sum_{k=1}^t |a_{s^G(k)}| \leq$

$$\sum_{k=1}^{s^G(t)} |a_{s(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{s(k)}| = B < \infty \text{ (řada } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{s(k)}| \text{ absolutně konverguje)} \text{ a tak je}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{s^G(k)}| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^t |a_{s^G(k)}| \leq B$$

což bylo dokázat. Označme $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{s^G(k)}| = \sigma_G$.

2. Uspořádejme \mathcal{F} do posloupnosti: $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$. Podle 1 každá $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s^{F_k}(n)}$ ($= \sigma_{F_k}$) abso-

lutně konverguje. Ježto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{s(n)}|$ konverguje, platí podle BC podmínky $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, že

$$\sum_{n=1}^p |a_{s(k+n)}| < \varepsilon \forall p \in \mathbb{N} \text{ odkud limitou } p \rightarrow \infty \text{ plyne}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } \sum_{n=1}^{\infty} |a_{s(k+n)}| \leq \varepsilon \quad (10.11)$$

Bud' $\varepsilon > 0$; zvolme $k \in \mathbb{N}$, aby $\{s(1), s(2), \dots, \text{funs}k\} \subset F_1 \cup \dots \cup F_l$ a pak $m \geq l$, aby $\{s(1), s(2), \dots, \text{funs}k\} \subset \{s^{F_1}(1), \dots, s^{F_1}(m)\} \cup \dots \cup \{s^{F_l}(1), \dots, s^{F_l}(m)\}$ ($= D$). Každé $a_{s(1)}, \dots, a_{s(k)}$ tedy je mezi $a_{s(j)}$, kde $s(j) \in D$, takže pro $r, t \geq m$ se v

$$b(r) = \left| \sum_{n=1}^r a_{s(n)} - \sum_{n=1}^r a_{s^{F_1}(n)} - \dots - \sum_{n=1}^r a_{s^{F_k}(n)} \right|$$

všechny členy $a_{s(1)}, \dots, a_{s(k)}$ vyruší a zbydou nejvýš $a_{s(p)}$ s $p \geq k+1$, takže $b(r) \leq \varepsilon$ podle (10.11). Je $\lim_{r \rightarrow \infty} b(r) = |\sigma - \sigma_{f_1} - \dots - \sigma_{F_t}| \leq \varepsilon \forall t \geq m$. Ukázali jsme tedy, že $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$, že $\left| \sigma - \sum_{k=1}^t \sigma_{F_k} \right| < \varepsilon \forall t \geq m$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k}$ konverguje k součtu σ .

Uspořádání \mathcal{F} do posloupnosti $\{F_1, F_2, \dots\}$ bylo libovolné, tudíž $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k}$ pro každé z nich konverguje k témuž součtu σ a tak $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k}$ konverguje absolutně.

□

Násobení řad

Věta 156. Bud'te $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = t$ absolutně konvergentní. Pak „dvojná“ řada $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j$ absolutně konverguje k st .

Důkaz. Uspořádáme členy dvojných řad do posloupnosti $\{c_n\}$

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{a_1 b_1}^{c_1}, & \overbrace{a_1 b_2}^{c_2}, & \overbrace{a_1 b_3}^{c_4}, & \dots \\ \overbrace{a_2 b_1}^{c_3}, & \overbrace{a_2 b_2}^{c_5}, & a_2 b_3, & \dots \\ \overbrace{a_3 b_1}^{c_6}, & a_3 b_2, & a_3 b_3, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \quad (10.12)$$

Odhadneme $\sum_{n=1}^k |c_n|$: Je $c_k = a_p b_q$ a pro každé $n = 1, \dots, k$ je $c_n = a_r b_s$, kde $r, s \leq p+q$ a tak $\sum_{n=1}^k |c_n| \leq \sum_{1 \leq r, s \leq p+q} |a_r| |b_s| \leq \sum_{r=1}^{p+q} |a_r| \sum_{s=1}^{p+q} |b_s| \leq ST$, kde $S = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, což dokazuje absolutní konvergenci dvojných řad.

Rozložme $S = \{(i, j) | i, j \in \mathbb{N}\}$ na $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, kde $F_k = \{(k, j) | j \in \mathbb{N}\}$ (takže množina všech dvojic $a_k b_j$ $\{a_k b_j | (k, j) \in F_k\}$ tvoří členy k . řádku v (10.12)). Přitom

$$\sigma_{F_k} = \sum_{(i,j) \in F_k} a_i b_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_k b_j = a_k t$$

a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t = st$$

□

Definice 157. Cauchyovým součinem řad se rozumí řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_k$, kde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergují a alespoň jedna absolutně, tak Cauchyův součin řad konverguje k st .