Úlohy - predikátová logika (přepis)

Martin Všetička

3. ledna 2009, 00:07

Zásadní informace pro následné čtení příkladů

Tvrzení:

Pravidlo tautologie (PPT)	Každá tautologie je dokazatelná v predikátové logice.
Pravidlo o rozboru případů (PR)	$T \vdash (A \vee B) \to C \Leftrightarrow (T \vdash A \to C)$ a $(T \vdash B \to C)$
Pravidlo konjunkce (PK)	$T \vdash A$ a $T \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \ \& \ B$
Pravidlo tranzitivity implikace (PTI)	$T \vdash A \to B$ a $T \vdash B \to C \Rightarrow T \vdash A \to C$

Důkaz.

1. PTT plyne z toho, že predikátová logika 1. řádu v sobě přirozeně obsahuje výrokovou logiku (tj. každá formule je výrok nad prvovýroky, které představují atomické formule a formule začínající kvantifikátorem).
2. PR plyne z PTT a z faktu, že $(A \vee B) \to C \leftrightarrow ((A \to B) \ \& \ (B \to C))$ je tautologie.
3. PK plyne z toho, že $A \to (B \to (A \ \& \ B))$ je tautologie, z PTT a z definice symbolu $\vdash$.
4. PTI plyne z toho, že $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ je tautologie.

□

Další základní poučky, pravidla, věty a axiomy a jejich symbolické označení

Poučka, pravidlo, axiom	**Symbol**	**Formulace**
Pravidlo Modus Ponens	MP	Odvoď B z A a $A \to B$
Pravidlo Generalizace	PG	Odvoď $(\forall x)A$ z A
Axiom Specifikace	AxS	$(\forall x)A \to A_x[t]$; $A_x[t] \to (\exists x)A$ ("duální verze")
Axiom Přeskoku	AxP	$(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$, není-li x volná v A.
Pravidlo Zavedení $\forall$	PZ$\forall$	$T \vdash A \to B \Rightarrow T \vdash A \to (\forall x)B$, není-li x volná v A.
Pravidlo Zavedení $\exists$	PZ$\exists$	$T \vdash A \to B \Rightarrow T \vdash (\exists x)A \to B$, není-li x volná v B.
Věta o uzávěru	VU	$T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash A'$, je-li A' uzávěr A.
Věta o Instanci	VI	$T \vdash A \Rightarrow T \vdash A'$, je-li A' instance A.
Věta o Substituci	VS	a) $\vdash (\forall x_1, \ldots, x_n)A \to A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$ b) $\vdash A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n] \to (\exists x_1, \ldots, x_n)A$
Věta o Konstantách	VK	$T \vdash A \Leftrightarrow T' \vdash A_{x_1,\ldots,x_n}[c_1, \ldots, c_n]$, je-li T' rozšíření o nové konstantní symboly $c_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
Věta o Dedukci	VD	Je-li A sentence, tak $T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \to B$.
Důkaz sporem	DS	Je-li A sentence, tak $T, \neg A$ je sporná $\Leftrightarrow T \vdash A$.
Pravidlo Distribuce Q	PDQ	$T \vdash A \to B \Rightarrow T \vdash (Qx)A \to (Qx)B$.
Věta o Ekvivalenci	VE	Nechť formule A' vznikne z formule A nahrazením některých výskytů podformulí $A_1, A_2, \ldots, A_n$ po řadě formulemi $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, kde pro $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ je $\vdash A_i \leftrightarrow A'_i$. Potom: $\vdash A \leftrightarrow A'$.
Věta o Variantách	VV	$\vdash A \leftrightarrow A'$, je-li A' varianta A.

Další běžně užívaná symbolická označení:

- Q ... označení pro kvantifikátor $(\forall, \exists)$
- $\Rightarrow$ ... značí české "implikuje".
- $\Leftrightarrow$ ... značí české "je ekvivalentní".
- $\rightarrow$ ... symbol pro implikaci ve formálním jazyce
- $\leftrightarrow$ ... symbol pro ekvivalenci ve formálním jazyce
- Pro formule A, B symbol $A \equiv B$ značí "formule A je B"; obdobně o termech t, s můžeme prohlásit $t \equiv s$
- Je-li A formule resp. t je term, symbol $A(\overline{x})$ resp. $t(\overline{x})$ značí, že $\overline{x}$ je nějaká n-tice $x_1, \ldots, x_n$ navzájem různých proměnných, mezi kterými jsou všechny volné proměnné A resp. všechny proměnné termu t.

F.1.0 Substituce, instance

F.1.0.1 Vlastnosti substitucí a instancí

1. Dokažte: $\vdash (\forall x)A \leftrightarrow (\forall y)A_x[y]$, pokud y není volná v A a je substituovatelná za x do A. Speciálně tedy platí: $(\forall x)A \leftrightarrow (\forall y)A_x[y]$, nemá-li y výskyt v A.

   Řešení: Označme $A_x[y]$ jako A'. Oba předpoklady o x, y v A zaručují, že volný výskyt y v A' je právě tam, kde je volný výskyt x v A. Tedy x je substituovatelné za y do A' a $A'_y[x]$ je A.

   $$\begin{array}{llr} (1) & \vdash (\forall y)A' \rightarrow A_y[x] & \text{(AxS)} \\ (1') & \vdash (\forall y)A' \rightarrow A & \text{(přepis)} \\ (2) & \vdash (\forall x)A \rightarrow A' & \text{(AxS)} \\ (3) & \vdash (\forall y)A' \rightarrow (\forall x)A & \text{(PZ}\forall\text{ na (1'))} \\ (4) & \vdash (\forall x)A \rightarrow (\forall y)A' & \text{(PZ}\forall\text{ na (2))} \\ (5) & \vdash (\forall x)A \leftrightarrow (\forall y)A_x[y] & \text{(PK na (3) a (4))} \end{array}$$

   Přípisek: Ukažme si ty substituce na příkladu, mějme formuli:

   $$A \equiv x = 0 \rightarrow \neg(\exists y)(y \neq 0)$$

   Máme splněné oba předpoklady (y není volná v A a y je substituovatelná za x). A' je tedy tvaru:

   $$A' \equiv y = 0 \rightarrow \neg(\exists y)(y \neq 0)$$

   Proměnná x je zřejmě substituovatelná za y, čímž dostaneme:

   $$A \equiv x = 0 \rightarrow \neg(\exists x)(x \neq 0)$$

2. Dokažte:

   $$\vdash (\forall x_1, \ldots, x_n)A \rightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$$

   Řešení: Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

   (*) $$\vdash (\forall x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)A \rightarrow A$$

Toto tvrzení dokážeme pomocí indukce:

(1)	$\vdash (\forall x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)A \to (\forall x_{i+1}, \ldots, x_n)A$	(AxS)
(2)	$\vdash (\forall x_{i+1}, \ldots, x_n)A \to A$	(indukční předpoklad)
(3)	$\vdash (\forall x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)A \to A$	(PTI na (1) a (2))

Dokazované tvrzení plyne z (*) pomocí věty o instancích:

(1)	$\vdash \big((\forall x_1, \ldots, x_n)A \to A\big)_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$	(VI na (*))
(2)	$\vdash (\forall x_1, \ldots, x_n)A \to A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$	(viz vysvětlení níže)

Přechod od (1) k (2) je možný proto, že premisa implikace v (1) neobsahuje žádnou z proměnných $x_1, \ldots, x_n$ volně - vycházíme tedy z definice substituovatelnosti termu do formule.

3. Dokažte:

$$\mathbb{M} \models A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n][e] \Leftrightarrow \mathbb{M} \models A[e'],$$

kde $e'(x_1/t_1[e], \ldots, x_n/t_n[e])$.

Řešení: Indukcí podle složitosti A. Pro A atomickou a spojky $\neg$ a $\to$ to je jasné. Indukční krok pro A tvaru $(\forall x)B$:

	$\mathbb{M} \models A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n][e]$	
$\Leftrightarrow$	$\mathbb{M} \models B_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n][e(x/a)]$ pro každé $a \in M$	(definice splňování)
$\Leftrightarrow$	$\mathbb{M} \models B[e(x/a)']$ pro každé $a \in M$	(indukční předpoklad)
$\Leftrightarrow$	$\mathbb{M} \models B[e'(x/a)]$ pro každé $a \in M$	(viz vysvětlení níže)
$\Leftrightarrow$	$\mathbb{M} \models (\forall x)B[e']$	(definice splňování)
$\Leftrightarrow$	$\mathbb{M} \models A[e']$	(přepis)

Třetí implikace plyne z $e'(x/a) = e(x/a)'$, což platí v důsledku toho, že x není v t_i díky substituovatelnosti t_i za x_i do A.

Přípisek: Kompletní důkaz je možno najít ve skriptech Jana Pelce, str. 28, lemma 8.12

F.1.0.2 Vlastnosti instancí - protipříklady

1.

$$\nvdash (\forall x)A \to A_x^t,$$

je-li A_x^t výsledek nahrazení každého volného výskytu x v A termem t.

Řešení: Podle věty o úplnosti predikátové logiky stačí: $\langle M, P^M \rangle \not\models (\forall x)A \to A_x^t$, kde:

- A je $(\exists y)P(x, y)$
- $M = \{a, b\}$
- $P^M = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$
- volíme $t \equiv y$

Přípisek: A_x^t není to samé, co substituovatelnost termu t za proměnnou x do formule A.

2.

$$\mathbb{M} \models A_x^t[e] \not\Leftrightarrow \mathbb{M} \models A[e'],$$

kde $e' = e(x/t[e])$ a A_x^t je výsledek nahrazení každého volného výskytu x v A termem t.

Řešení: Protipříklad je následující:

- A buď $(\exists y)P(x, y)$
- t buď y; tedy A_x^t je $(\exists y)P(y, y)$
- $M = \{a, b\}$
- $P^M = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

Mějme $e(x) = a, e(y) = b$ a $e'(x) = b = e'(y)$. Pak $\langle M, P^M\rangle \models A[e']$, ale $\langle M, P^M\rangle \not\models A_x^y[e]$.

3.
$$T \vdash A_x[t] \not\Rightarrow T \vdash A,$$

kde T je jistá teorie v jazyce $\langle M, P, c\rangle$ - P je unární predikát, c konstanta.

Řešení: Protipříklad je následující:

- Buď $T = \{P(c)\}$
- Buď $\mathbb{M} = \langle M, P^M, c^M\rangle \models T$, kde $P^M \neq \{c^M\}$ [1]
- Buď $A \equiv P(x)$
- Buď $t \equiv c$

Pak $\mathbb{M} \models P(c)$, ale $\mathbb{M} \not\models P(x)$

F.1.1 Varianta

F.1.1.1

Definice: Říkáme, že formule A' je *variantou* formule A, jesliže A' vznikne z A postupným nahrazením podformulí tvaru $(Qx)B$ formulemi $(Qy)B_x[y]$, kde y není volná proměnná ve formuli $(Qx)B$.

Buďte x, y, z, u různé proměnné, Q kvantifikátor. Odpovězte a uveďte důvod, zda platí:

B je varianta A.

1. $A \coloneqq (Qx)(x < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq x))$, $B \coloneqq (Qz)(z < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq z))$

   Řešení: Ne. z není substitovatelné za x do A.

   Přípisek: Protože existuje podformule A ve tvaru $(\exists z)C$ taková, že x má v C volný výskyt.

2. $A \coloneqq (Qx)(x < y \vee (\forall z)(z = y \ \& \ z \neq x))$, $B \coloneqq (Qy)(y < y \vee (\forall z)(z = y \ \& \ z \neq y))$

   Řešení: Ne. y je volná v A.

3. $A \coloneqq (Qx)(x < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq x))$, $B \coloneqq (Qu)(u < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq u))$

   Řešení: Ano. u není volná v A a je substituovatelná za x do A.

[1] $\mathbb{M}$ je vlastně soubor nějakých ohodnocení ohodnocení e

F.1.2 Dokazatelné, vyvratitelné a nezávislé formule

F.1.2.1 Dokazatelnost jednoduchých formulí

Buďte P, R různé unární predikátové symboly. Odpovězte, zda uvedená formule je:

dokazatelná (D) / vyvratitelná (V) / nezávislá (NZ)

a uveďte důvod.

1. P

   Řešení: NZ. $\langle 1, 0\rangle \models \neg P, \langle 1, 1\rangle \models P$

   Přípisek: $\langle 1, 0\rangle$ zde značí model jehož interpretace (realizace) je:

   - $M = 1 = \{0\}$ ...jednoprvková množina, že je jejím prvkem zrovna nula není příliš podstatné
   - $P^M = \varnothing$

2. $P \rightarrow R$

   Řešení: NZ.

   - $\langle 2, 0, 2\rangle \models P \rightarrow R$ ...Premisa (P) je vždy nesplněná.
   - $\langle 2, 2, 0\rangle \models \neg(P \rightarrow R)$ ...Premisa (P) je vždy splněná, závěr (R) je však vždy nesplňen.

   Přípisek: $\langle 2, 0, 2\rangle$ zde značí model jehož interpretace (realizace) je:

   - $M = 2 = \{0, 1\}$
   - $P^M = \varnothing$
   - $R^M = \{\{0\}, \{1\}\}$

3. $P \rightarrow (R \rightarrow P)$

   Řešení: D. Je to tautologie (instance axiomu A1).

4. $(\exists x)P(x)$

   Řešení: NZ.

   - $\langle 1, 0\rangle \models \neg(\exists x)P$
   - $\langle 1, 1\rangle \models (\exists x)P$

5. $P(x) \vee (\exists x)\neg P(x)$

   Řešení: D. Formule je logicky ekvivalentní s $(\forall x)P \rightarrow P$, což je axiom substituce.

   Přípisek:

(1)		$P(x) \vee (\exists x)\neg P(x)$	
(2)	$\Leftrightarrow$	$\neg P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$	(zkratky)

   Formule (2) není nic jiného než instance "duální verze"axiomu specifikace (viz tabulka v první kapitole).

F.1.2.2 Nezávislé formule v modelu

1. Buď A formule $P \to (\forall x)P$, kde P je unární relační symbol. V právě kterých modelech[2] $\langle M, P^M \rangle$, neplatí A ani $\neg A$?

   Řešení: Právě, když $0 \neq P^M \neq M$.

   Připisek: Pokud bude splněno $0 \neq P^M \neq M$, pak pro danou realizaci jazyka (pojem model mi zde obsahově nesedí) budou vždy existovat ohodnocení e a e' taková, že $\langle M, P^M \rangle \models A[e]$ ale $\langle M, P^M \rangle \not\models A[e']$.

2. Buď A formule $x = c$, kde c je konstantní symbol. V právě kterých modelech $\langle M, c^M \rangle$, neplatí A ani $\neg A$?

   Řešení: Právě když $|M| > 1$.

   Připisek: Pokud bude $|M| > 1$, pak bude existovat právě jedno ohodnocení e, pro které bude platit $e(x) = c^M$, pro jedno ohodnocení bude tedy formule splněna pro zbývající ne, tedy formule je nezávislá.

3. Buď A formule $P \to (\forall x)R$, kde P, R jsou různé unární predikátové symboly. V právě kterých modelech $\mathbb{M} = \langle M, P^M, R^M \rangle$, neplatí A ani $\neg A$?

   Řešení: Právě, když $0 \neq P^M \neq M \neq R^M$.

   Připisek: Zřejmě platí:

   - $\mathbb{M} \not\models A \Leftrightarrow \underbrace{P^M \neq 0}_{\#1}$ a $\underbrace{R^M \neq M}_{\#2}$,
   - $\mathbb{M} \not\models \neg A \Leftrightarrow \underbrace{P^M \neq M}_{\#3}$ nebo $\underbrace{R^M = M}_{\#4}$.

   Aby byla formule A nezávislá, musíme spojit podmínky #1, #2 a #3 (viz [3]).

F.1.3 Protipříklady

F.1.3.1 K větě o dedukci a o důkazu sporem

1. $$T, A \vdash B \nRightarrow T \vdash A \to B,$$

   kde $T = \{(\exists x)P\}$ je teorie v jazyce $\langle P \rangle$ s unárním predikátem P, A je $P(x)$ a B vhodné.

   Řešení:

   - Buď B formule $(\forall x)P(x)$.

   Je dokazatelné $T, A \vdash B$:

(1)	$T, P(x) \vdash P(x)$	
(2)	$T, P(x) \vdash (\forall x)P(x)$	(PG)

   Platí však $T \not\vdash A \to B$, neboť $\langle M, P^M \rangle \not\models P(x) \to (\forall x)P(x)$, když $0 \neq P^M \neq M$.

[2] Použil bych raději pojem interpretace jazyka, jelikož model je definován jako interpretace jazyka L, při které je formule *pravdivá*.

[3] Podmínky #1, #2 a #4 se vylučují, pro jich nelze použít.

2.
$$T, \neg A \text{ je sporná teorie } \not\Rightarrow T \vdash A,$$

kde $T = \{(\exists x)P\}$ je teorie v jazyce $\langle P \rangle$ s unárním predikátem P a A je vhodné.

Řešení:

- Buď A rovno P.

$T, \neg A$ je sporná, neboť dokazuje $(\exists x)P \ \& \ \neg(\exists x)P$:

(1)	$T, \neg P \vdash \neg P$	(předpoklad)
(2)	$T, \neg P \vdash (\forall x)\neg P$	(PG)
(3)	$T, \neg P \vdash (\exists x)P$	(předpoklad)
(4)	$T, \neg P \vdash (\exists x)P \ \& \ (\forall x)\neg P$	(Pravidlo konjunkce na (2) a (3))
(5)	$T, \neg P \vdash (\exists x)P \ \& \ \neg(\exists x)P$	(Prenex (i) + VE)

Díky tautologii $(B \ \& \ \neg B) \to C$ dostáváme $T, \neg A \vdash C$.
Na druhé straně $T \nvdash A$, neboť $(\exists x)P \nvdash P$, o čemž svědčí model $\langle 2, 1 \rangle \not\models P$.

F.1.4 Tvrzení o kvantifikátorech

F.1.4.1 Vytýkání kvantifikátorů

Nechť Q značí kvantifikátor, Q' kvantifikátor "duální"ke Q.

1. $(\forall x)(A \to B) \leftrightarrow (A \to (\forall x)B)$, nemá-li x volný výskyt v A.

   Řešení:

   "$\to$" Instance axiomu přeskoku.

   "$\leftarrow$" Dokazujeme takto:

(1)	$\vdash (A \to (\forall x)B) \to (((\forall x)B \to B) \to (A \to B))$	(tautologie PTI)
(2)	$\vdash ((\forall x)B \to B) \to ((A \to (\forall x)B) \to (A \to B))$	(věta o záměně předpokladů[3])
(3)	$\vdash (\forall x)B \to B)$	(AxS)
(4)	$\vdash (A \to (\forall x)B) \to (A \to B)$	((2), (3) MP)
(5)	$\vdash (A \to (\forall x)B) \to (\forall x)(A \to B)$	(PZ$\forall$)

2. $(\exists x)(A \to B) \to (A \to (\exists x)B)$, nemá-li x volný výskyt v A.

   Řešení:

   "$\to$" Dokazujeme:

(1)	$\vdash (A \to B) \to ((B \to (\exists x)B) \to (A \to (\exists x)B))$	(tautologie PTI)
(2)	$\vdash (B \to (\exists x)B) \to ((A \to B) \to (A \to (\exists x)B))$	(věta o záměně předpokladů[3])
(3)	$\vdash B \to (\exists x)B$	("duální"verze AxS)
(4)	$\vdash (A \to B) \to (A \to (\exists x)B)$	((2), (3) MP)
(5)	$\vdash (\exists x)(A \to B) \to (A \to (\exists x)B)$	(PZ$\exists$)

[3] viz skripta Jana Pelce, věta 3.14

3. $(A \to (\exists x)B) \to (\exists x)(A \to B)$

Řešení:

"$\to$" Dokazujeme:

(1)	$\vdash (A \to B) \to (\exists x)((A \to B)$	("duální"verze AxS)
(2)	$\vdash \neg A \to (A \to B)$	(V2)
(3)	$\vdash \neg A \to (\exists x)(A \to B)$	((1), (2) PTI)
(4)	$\vdash B \to (A \to B)$	(A1)
(5)	$\vdash (\exists x)B \to (\exists x)(A \to B)$	(DK[4])
(6)	$\vdash (\neg A \vee (\exists x)B) \to (\exists x)(A \to B)$	((3), (5) PR)
(7)	$\vdash (\neg A \vee (\exists x)B) \leftrightarrow (A \to (\exists x)B)$	(zkratky)
(8)	$\vdash (A \to (\exists x)B) \to (\exists x)(A \to B)$	(VE na (6) se (7))

4. $(Qx)(A \to B) \leftrightarrow ((Q'x)A \to B)$, nemá-li x volný výskyt v B.

Návod: Užijte tvrzení o vytýkání kvantifikátorů z konsekventu implikace.

Řešení:

(1)	$\vdash (Qx)(A \to B) \leftrightarrow (Qx)(\neg B \to \neg A)$	(V5)
(2)	$\leftrightarrow (\neg B \to (Qx)\neg A)$	(Prenex (ii))
(3)	$\leftrightarrow (\neg(Qx)\neg A \to B)$	(V5 a V3,V4)
(4)	$\leftrightarrow ((Q'x)A \to B)$	(vztah mezi $\forall$ a $\exists$)

5. $(Qx)(A \diamondsuit B) \leftrightarrow (A \diamondsuit (Qx)B)$, nemá-li x volný výskyt v A, $\diamondsuit$ je $\vee$ nebo &.

Návod: Užijte tvrzení o vytýkání kvantifikátorů z konsekventu implikace.

Řešení:

(a) Q je $\forall$, $\diamondsuit$ je $\vee$. Jsou dokazatelné ekvivalence:

(1)	$\vdash (\forall x)(A \vee B) \leftrightarrow (\forall x)(\neg A \to B)$	(zkratky)
(2)	$\leftrightarrow (\neg A \to (\forall x)B)$	(Prenex (ii))
(3)	$\leftrightarrow (A \vee (\forall x)B)$	(zkratky)

(b) Ostatní vztahy plynou z (a) užitím $\vdash (\exists x)C \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg C$, $\vdash C \leftrightarrow \neg\neg C$, deMorganových pravidel a věty o ekvivalenci.

F.1.4.2 Vytýkání kvantifikátorů - protipříklady

Nechť Q značí kvantifikátor, Q' kvantifikátor "duální"ke Q.

1. $\nvdash (\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$.

Řešení:

- Buď $\mathbb{M} = \langle M, P^M, R^M \rangle$, kde P, R jsou unární predikátové symboly.
- Buď $a \in P$.

[4]Distribuce Kvantifikátorů, Jan Pelc, lemma 9.9; důsledek PZ$\exists$

- Nechť platí $0 \neq P^M \subseteq R^M \subseteq M$.

Pak $\mathbb{M} \models (\forall x)(P \to R), \mathbb{M} \not\models (P \to (\forall x)R)[a]$. Tedy $\mathbb{M} \not\models (\forall x)(P \to R) \to (P \to (\forall x)R)$.

2. $\nvdash (A \to (\forall x)B) \to (\forall x)(A \to B)$.

Řešení:

- Buď $\mathbb{M} = \langle M, P^M, R^M \rangle$, kde P, R jsou unární predikátové symboly.
- Buď $a \in M \backslash P^M$.
- Nechť platí $0 \neq P^M \nsubseteq R^M$.

Pak

- $\mathbb{M} \models (P \to (\forall x)R)[a]$ ...jelikož není splněna premisa
- $\mathbb{M} \not\models (\forall x)(P \to R)$

Tedy $\mathbb{M} \not\models (P \to (\forall x)R) \to (\forall x)(P \to R)$.

3. $\nvdash (\exists x)(A \to B) \to (A \to (\exists x)B)$.

Řešení:

- Buď $\mathbb{M} = \langle M, P^M, R^M \rangle$, kde P, R jsou unární predikátové symboly.
- Buď $a \in P^M$.
- Nechť platí $0 \neq P^M \subsetneq M, R = 0$.

Pak

- $\mathbb{M} \models (\exists x)(P \to R)$ ...protože existuje $a \in M \backslash P^M$
- $\mathbb{M} \not\models (P \to (\exists x)R)[a]$ ...protože je $a \in P^M$

Tedy $\mathbb{M} \not\models (\exists x)(P \to R) \to (P \to (\exists x)R)$.

F.1.4.3 Vlastnosti kvantifikátorů

1. Dokažte syntakticky, přičemž Q značí kvantifikátor:

$$\vdash (Qx)(A \ \& \ B) \to (Qx)A \ \& \ (Qx)B$$

Řešení: Nechť všechny volné proměnné formulí A, B kromě x jsou mezi $x_1, \ldots, x_n$, nechť $c_1, \ldots, c_n$ jsou nové konstantní symboly, A' je $A_{x_1,\ldots,x_n}[c_1, \ldots, c_n]$, B' je $B_{x_1,\ldots,x_n}[c_1, \ldots, c_n]$.

(1)		$\vdash (A' \ \& \ B') \to A'$	(PK (tautologie))
(2)		$\vdash (A' \ \& \ B') \to B'$	(PK (tautologie))
(3)		$\vdash (Qx)(A' \ \& \ B') \to (Qx)A'$	(PDQ na (1))
(4)		$\vdash (Qx)(A' \ \& \ B') \to (Qx)B'$	(PDQ na (2))
(5)	$(Qx)(A' \ \& \ B')$	$\vdash (Qx)A'$	((3) VD)
(6)	$(Qx)(A' \ \& \ B')$	$\vdash (Qx)B'$	((4) VD)
(7)	$(Qx)(A' \ \& \ B')$	$\vdash (Qx)A' \ \& \ (Qx)B'$	(PK na (5), (6))
(8)		$\vdash (Qx)(A' \ \& \ B') \to (Qx)A' \ \& \ (Qx)B'$	((7) VD)
(9)		$\vdash (Qx)(A \ \& \ B) \to (Qx)A \ \& \ (Qx)B$	((8) VK)

2. Dokažte syntakticky, přičemž Q značí kvantifikátor:

$$\vdash (\forall x)A \ \& \ (\forall x)B \to (\forall x)(A \ \& \ B)$$

Řešení: Nechť všechny volné proměnné formulí A, B kromě x jsou mezi $x_1, \dots, x_n$, nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou nové konstantní symboly, A' je $A_{x_1,\dots,x_n}[c_1, \dots, c_n]$, B' je $B_{x_1,\dots,x_n}[c_1, \dots, c_n]$.

(1)	$(\forall x)A' \;\&\; (\forall x)B' \vdash A'$	(AxS + MP)
(2)	$(\forall x)A' \;\&\; (\forall x)B' \vdash B'$	(AxS + MP)
(3)	$(\forall x)A' \;\&\; (\forall x)B' \vdash A' \;\&\; B'$	(PK na (1) a (2))
(4)	$(\forall x)A' \;\&\; (\forall x)B' \vdash (\forall x)(A' \;\&\; B')$	(PG)
(5)	$\vdash (\forall x)A' \;\&\; (\forall x)B' \to (\forall x)(A' \;\&\; B')$	(VD)
(6)	$\vdash (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B \to (\forall x)(A \;\&\; B)$	(VK)

3. Dokažte syntakticky:

$$\vdash (\forall x)(A \;\&\; B) \leftrightarrow (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B, \vdash (\exists x)(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$$

Návod: i) $\vdash (Qx)(A \;\&\; B) \to (Qx)A \;\&\; (Qx)B$, ii) $\vdash (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B \to (\forall x)(A \;\&\; B)$

Řešení:

(a) První formule:

(1)	$\vdash (\forall x)(A \;\&\; B) \to (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B$	(příklad 1., tj. hint i))
(2)	$\vdash (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B \to (\forall x)(A \;\&\; B)$	(příklad 2., tj. hint ii))
(3)	$\vdash (\forall x)(A \;\&\; B) \leftrightarrow (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B$	(PK (1) a (2))

(b) Druhá formule plyne z první užitím (Negace Implikace (NI)):
$T \vdash C \to C' \Leftrightarrow T \vdash \neg C' \to \neg C$ (což plyne z PTT) a VE.

(1)	$\vdash \neg(\forall x)(A \;\&\; B) \leftrightarrow \neg((\forall x)A \;\&\; (\forall x)B)$	(NI)
(2)	$\vdash \neg(\forall x)(A \;\&\; B) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg(\neg A \vee \neg B)$	(deMorgan)
(3)	$\leftrightarrow (\exists x)(\neg A \vee \neg B)$	(zkratky)
(4)	$\vdash \neg((\forall x)A \;\&\; (\forall x)B) \leftrightarrow \neg(\forall x)A \vee \neg(\forall x)B$	(deMorgan)
(5)	$\leftrightarrow (\exists x)\neg A \vee (\exists x)\neg B$	(zkratky)
(6)	$\vdash (\exists x)(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (\exists x)\neg A \vee (\exists x)\neg B$	

Formule (6) plyne z toho, že jsme dokázali ekvivalentními úpravami obě strany formule (6) z již dokázaného tvrzení. Formuli (6) si navíc můžeme pozměnit[5], tak že podformule tvaru $\neg B$ zaměníme za B, čímž dostaneme žádáné.

4. Dokažte syntakticky:

$$\vdash (\exists x)(A \;\&\; B) \to (\exists x)A \;\&\; (\exists x)B, \vdash (\forall x)A \vee (\forall x)B \to (\forall x)(A \vee B)$$

Návod: i) $\vdash (Qx)(A \;\&\; B) \to (Qx)A \;\&\; (Qx)B$, ii) $\vdash (\forall x)A \;\&\; (\forall x)B \to (\forall x)(A \;\&\; B)$

Řešení:

(a) První formule: Přímo plyne z hintu i)

(b) Druhá formule plyne z první užitím (Negace Implikace (NI)):
$T \vdash C \to C' \Leftrightarrow T \vdash \neg C' \to \neg C$ (což plyne z PTT) a VE.

5. Dokažte syntakticky: $\vdash (\forall x)(\forall y)A \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A$, $\vdash (\exists x)(\exists y)A \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A$

Řešení:

[5] Tím vlastně vytváříme instanci dané tautologie.

(a) První formule:

(1)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)A$	(AxS)
(2)	$\vdash (\forall y)A \to A$	(AxS)
(3)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to A$	(PTI na (1) a (2))
(4)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall x)A$	(PZ∀)
(5)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)(\forall x)A$	(PZ∀)

Ze symetrie plyne druhá implikace. Pomocí PK pak plyne tvrzení.

(b) Druhá formule plyne z první formule užitím NI a VE:

(1)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A$	$\Leftrightarrow\ \vdash \neg(\forall x)(\forall y)A \leftrightarrow \neg(\forall y)(\forall x)A$	(NI)
(2)		$\Leftrightarrow\ \vdash (\exists x)\neg(\forall y)A \leftrightarrow (\exists y)\neg(\forall x)A$	(Prenex (i))
(3)		$\Leftrightarrow\ \vdash (\exists x)(\exists y)\neg A \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\neg A$	(Prenex (i))
(4)		$\Leftrightarrow\ \vdash (\exists x)(\exists y)A \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A$	

V kroku (4) jsme provedli stejnou úvahu jako v příkladu 3.

6. Dokažte syntakticky, přičemž Q značí kvantifikátor:
$\vdash (\exists x)(\forall y)A \to (\forall y)(\exists x)A$, $\quad \vdash (Qx)A \leftrightarrow A$, není-li x volná v A.

Řešení:

(a) První formule:

(1)	$\vdash A \to (\exists x)A$	(VS)
(2)	$\vdash (\forall y)A \to (\forall y)(\exists x)A$	(PD∀)
(3)	$\vdash (\exists x)(\forall y)A \to (\forall y)(\exists x)A$	(PZ∃)

(b) Druhá formule. Q buď $\forall$.

(1)	$\vdash (\forall x)A \to A$	(AxS)
(2)	$\vdash A \to (\forall x)A$	(PZ∀)
(3)	$\vdash (\forall x)A \leftrightarrow A$	(PK na (1) a (2))

Pro Q rovno $\exists$ plyne tvrzení z dokázaného užitím NI a VE.

7. Dokažte:

$$A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x = t \to A),$$

není-li x obsaženo v termu t.

Řešení:

"$\to$"

(1)	$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to (t = t \to A_x[t])$	(AxS[6])
(2)	$\vdash t = t \to ((\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t])$	(Záměna předpokladů)
(3)	$\vdash t = t$	(Axiom identity)
(4)	$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t]$	(MP)

[6] Předpokládá se substituovatelnost t za x do A

”←”

(1)	$\vdash t_1 = s_1 \to t_2 = s_2 \to \cdots \to t_n = s_n \to (A[t_1, \ldots, t_n] \leftrightarrow A[s_1, \ldots, s_n])$	(VR[7])
(2)	$\vdash x = t \to (A \leftrightarrow A_x[t])$	(z (1))
(3)	$\vdash A_x[t] \to (x = t \to A)$	(ZP)
(4)	$\vdash A_x[t] \to (\forall x)(x = t \to A)$	(PZ∀)

V kroku (4) jsme využili předpokladu, ze kterého plyne, že x není volná v $A_x[t]$.

8. Dokažte:

$$A_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x = t \ \& \ A),$$

není-li x obsaženo v termu t.

Řešení:

”→” PT bude značit předpoklad tvrzení.

(1)	$\vdash (t = t \ \& \ A_x[t]) \to (\exists x)(x = t \ \& \ A)$	(AxS a PT)
(2)	$\vdash t = t$	(Axiom identity)
(3)	$\vdash A_x[t] \to (\exists x)(x = t \ \& \ A)$	(z PT a (2))

”←”

(1)	$\vdash t_1 = s_1 \to t_2 = s_2 \to \cdots \to t_n = s_n \to (A[t_1, \ldots, t_n] \leftrightarrow A[s_1, \ldots, s_n])$	(VR)
(2)	$\vdash x = t \to (A \leftrightarrow A_x[t])$	(z (1))
(3)	$\vdash (x = t \ \& \ A) \to A_x[t]$	(z (2))
(4)	$\vdash (\exists x)(x = t \ \& \ A) \to A_x[t]$	(PZ∃)

V kroku (4) jsme využili předpokladu, ze kterého plyne, že x není volná v $A_x[t]$.

Příklady odjinud

1. Dokažte syntakticky v predikátové logice: $(\exists x)(\exists y)(P(x) \vee \neg P(y))$

Řešení:

(5)		$\vdash (\forall x)P(x) \to P(x)_x[y]$	(AxS)
(6)	$(\forall x)P(x)$	$\vdash P(x)_x[y]$	(VD)
(7)		$\vdash P(x)_x[y] \to (\exists x)P(x)$	(PS)
(8)		$\vdash (\forall x)P(x) \to (\exists x)P(x)$	((2),(3) MP, VD)
(9)		$\vdash (\exists x)P(x) \to (\exists y)P(x)_x[y]$	(VV)
(10)		$\vdash (\forall x)P(x) \to (\exists y)P(y)$	((4) VD + (5) MP, VD)
(11)		$\vdash (\exists x)\big(P(x) \to (\exists y)P(y)\big)$	(Prenex (iii))
(12)		$\vdash (\exists x)(\exists y)\big(P(x) \to P(y)\big)$	(Prenex (ii))
(13)		$\vdash (\exists x)(\exists y)\big(\neg P(x) \vee P(y)\big)$	(zkratky)

[7] Věta o rovnosti