

Principy počítačů a operačních systémů

Aritmetické a logické operace

Zimní semestr 2007/2008

Aritmeticko-logické operace

Logické operace

- operace s jednotlivými bity reprezentace čísla

Operace posunu

- posouvají bity reprezentace vlevo/vpravo
- logický a aritmetický posun, rotace

Aritmetické operace

- sčítání, odčítání, násobení, dělení
- porovnávání

Logické operace

Základní operace

- unární NOT (\neg , !)
- binární OR (+, |), AND (\cdot , &)

Odvozené operace

- XOR, NOR, NAND, XNOR, ...

Pravdivostní tabulky

A	NOT
0	1
1	0

A	B	OR	AND	XOR	NOR	NAND	XNOR
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Příklady logických operací

OR

- $13_{16} \text{ OR } C9_{16} = DB_{16}$

0	0	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

1	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

1	1	0	1	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

AND

- $13_{16} \text{ AND } C9_{16} = 01_{16}$

0	0	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

1	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

0	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

NOT

- $\text{NOT } C9_{16} = 36_{16}$

1	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

0	0	1	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Operace posunu

Logické posuny

- posouvají bity operandu o N míst vlevo/vpravo
- “uvolněné” bity nastaveny na 0
- reprezentují násobení/dělení 2

Aritmetický posun vpravo

- zleva vstupuje hodnota nejvyššího bitu
- dělení 2 pro číslo ve dvojkovém doplňku

Rotace

- cyklický posun bitů o N míst vlevo/vpravo

Příklady operací posunu

Shift Left

▪ $13_{16} \text{ SHL } 2_{10} = 46_{16}$

0	0	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

0	1	0	0	1	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Shift Right

▪ $13_{16} \text{ SHR } 2_{10} = 04_{16}$

0	0	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

0	0	0	0	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Rotate Left

▪ $C9_{16} \text{ ROL } 2_{10} = 27_{16}$

1	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

0	0	1	0	0	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Shift Arithmetic Right

▪ $C9_{16} \text{ SAR } 2_{10} = F2_{16}$

1	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

1	1	1	1	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Operace sčítání

Obecný postup

- součet ve dvojkové soustavě
- přenos z nejvyššího řádu se “zahodí”

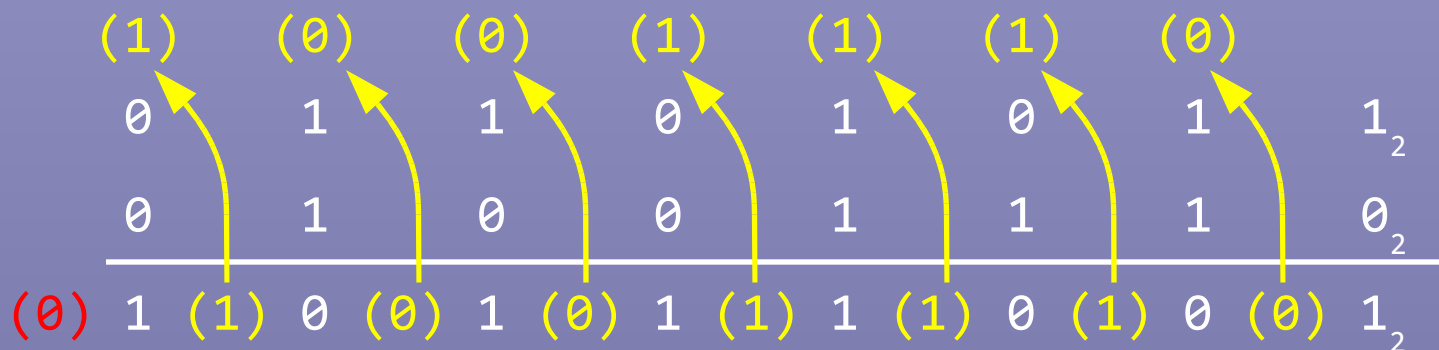
Specifický postup

- reprezentace se znaménkovým bitem
 - ♦ pouze stejná znaménka, jinak odčítat
- reprezentace s posunutím 0
 - ♦ od výsledku odečíst posunutí
- reprezentace v jedničkovém doplňku
 - ♦ přenos z nejvyššího řádu přičíst k výsledku

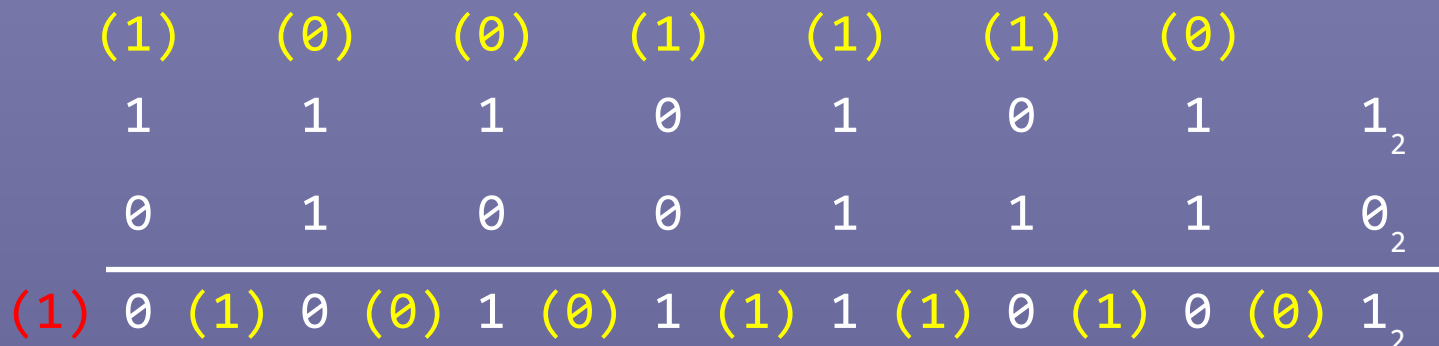
Příklady operace sčítání (1)

Oběcný postup

- $107_{10} + 78_{10} = 185_{10}$



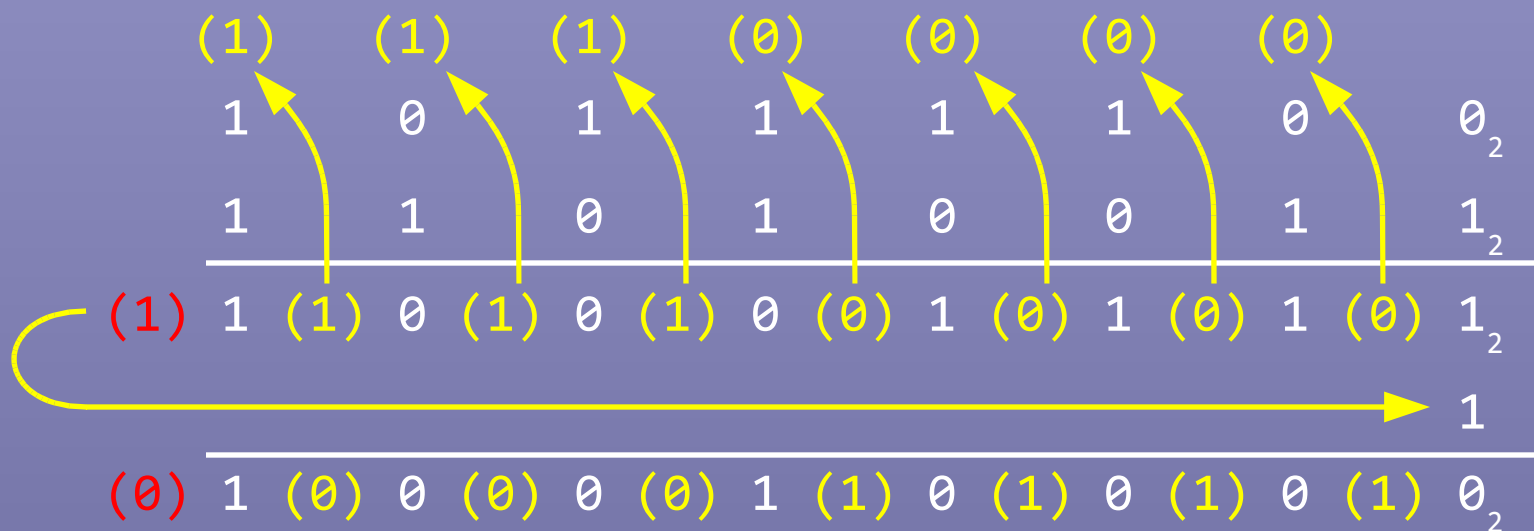
- $235_{10} + 78_{10} \equiv 57_{10}$



Příklady operace sčítání (2)

Reprezentace v jedničkovém doplňku

- $-67_{10} + (-44_{10}) = -111_{10} = 10010000_2$



- kruhový přenos (end-around carry)
- u součtu nezáporných čísel je přenos nulový

Přetečení při sčítání

Přirozená čísla

- procesor ignoruje, překladač ignoruje

Celá čísla

- procesor ignoruje, překladač kontroluje
 - ♦ může nastat pouze při stejných znaménkách
- reprezentace se znaménkovým bitem
 - ♦ indikováno přenosem z nejvyššího řádu
- posunutí o a doplňkové reprezentace
 - ♦ nejvyšší bit indikuje znaménko (i u posunutí)
 - ♦ znaménkový bit výsledku se liší od znaménka operandů

Operace odčítání

Obecný postup

- rozdíl ve dvojkové soustavě
- výpůjčka z nejvyššího řádu se “zahodí”

Specifický postup

- reprezentace se znaménkovým bitem
 - ♦ pouze stejná znaménka, jinak sčítat
 - ♦ operace $A - B$, provést $-(B - A)$ pokud $|B| > |A|$
- reprezentace s posunutím nuly
 - ♦ k výsledku přičíst posunutí
- doplňkové reprezentace
 - ♦ přičíst doplněk menšitele \Rightarrow sčítání

Příklady operace odčítání (1)

Obecný postup

- $107_{10} - 78_{10} = 29_{10}$

		(0)		(0)		(-1)		(-1)		(-1)		(0)		(0)	
(0)	0	(0)	1	(0)	1	(1)	0	(1)	1	(1)	0	(0)	1	(0)	1_2
	0		1		0		0		1		1		1		0_2
	0		0		0		1		1		1		0		1_2

- $43_{10} - 78_{10} \equiv 221_{10}$

		(-1)		(0)		(-1)		(-1)		(-1)		(0)		(0)	
(1)	0	(1)	0	(0)	1	(1)	0	(1)	1	(1)	0	(0)	1	(0)	1_2
	0		1		0		0		1		1		1		0_2
	1		1		0		1		1		1		0		1_2

Příklady operace odčítání (2)

Reprezentace ve dvojkovém doplňku

- $107_{10} - 78_{10} = 29_{10} = 00011101_2$

$$+107 = 01101011_2$$

$$+78_{10} = 01001110_2$$

- doplněk menšitele

$$-78_{10} = 10110001_2 + 1_2 = 10110010_2$$

- součet

	(1)		(1)		(0)		(0)		(0)		(1)		(0)	
	0		1		1		0		1		0		1	1_2
	1		0		1		1		0		0		1	0_2
<hr/>														
(1)	0	(1)	0	(1)	0	(0)	1	(0)	1	(0)	1	(1)	0	(0) 1_2

Přetečení při odčítání

Přirozená čísla

- procesor ignoruje, překladač ignoruje

Celá čísla

- procesor ignoruje, překladač kontroluje
 - ♦ může nastat pouze při různých znaménkách
- reprezentace se znaménkovým bitem
 - ♦ nemůže nastat, muselo by se sčítat
- reprezentace s posunutím 0
 - ♦ různá znaménka a přetečení při přičtení posunu
- doplňkové reprezentace
 - ♦ neodčítá se, viz operace sčítání

Odčítání v doplňkové reprezentaci

Převod na součet

$$B - A = B - A + M - M = B + (M - A) - M = B + A' - M$$

- místo odečtení se přičte doplněk do modulu M a odečte se modul M , přičemž $M > A, B$

$$M = z^n \quad A' = M - A = z^n - A \quad B - A = B + A' - M$$

Jak se vyhnout odečtení M ?

- $A \leq B$, potom $B - A \geq 0$ a tedy $B + A' \geq z^n$
 - ♦ odečtení M odpovídá “zahození” nejvyšší jedničky
- $A > B$, potom $B - A < 0$ a tedy $B + A' < z^n$
 - ♦ součet $B + A'$ odpovídá doplňku rozdílu $B - A$
 $-(B - A) = -(B + A' - M) = M - (B + A')$

Nalezení doplňku čísla

Standardní způsob

- základ z , doplněk n -ciferného čísla A

$$A' = M - A = z^n - A$$

Zjednodušený způsob

- pomocí redukováného doplňku A^r

$$A^r = (M - 1) - A = (M - A) - 1 = A' - 1$$

$$A' = A^r + 1$$

$$A^r = (z^n - 1) - A \quad a_i^r = (z - 1) - a_i$$

- odpovídá inverzi číslic a přičtení 1
 - ♦ ve dvojkové soustavě převrácení bitů a přičtení 1

Odčítání v desítkovém doplňku

$$A = 391, B = 48032$$

- $n = 5, M = 100000$

- $B - A = 48032 - 391$

48032	48032
-00391	+ 99608
<hr/>	
47641	+ 1
	<hr/>
	147641
	-100000
	<hr/>
	47641

$$A = 391, B = 48032$$

- $n = 5, M = 100000$

- $A - B = 391 - 48032$

00391	00391
-48032	+ 51967
<hr/>	
-47641	+ 1
	<hr/>
	052359
	-100000
	<hr/>
	- 47641

Modulární aritmetika

Aritmetika na konečné podmnožině N

- $N_M \subset N, |N_M| = M$, kde M ... modul
 - ♦ kongruence modulo M , $a \equiv b \pmod{M}$ iff $M \mid (a - b)$
 $-7 \equiv 5 \pmod{12}$ $29 \equiv 5 \pmod{12}$
 - ♦ rozklad \mathbb{Z} na M zbytkových tříd (třídy ekvivalence)
 - ♦ algebraické operace nad třídami ekvivalence
- číselná osa \Rightarrow kružnice
- běžné operace \Rightarrow operace modulo M
- obecně $M > 0$, zajímavé $M = z^n$
 - ♦ nejvýše n -ciferná čísla, $N_M = \{ 0, \dots, z^n - 1 \}$

Význam doplňku v modulární aritmetice

Negace čísla

- převod $B - A$ na $B + (-A)$

Doplňkový kód

- reprezentace záporných čísel pomocí přirozených
- pro $M = 16$, $-A = 16 - A$

$$\left. \begin{array}{l} \{ \dots, -16, \mathbf{0}, 16, \dots \} \equiv \mathbf{0} \pmod{16} \\ \dots \\ \{ \dots, -9, \mathbf{7}, 17, \dots \} \equiv \mathbf{7} \pmod{16} \\ \{ \dots, \mathbf{-8}, 8, 24, \dots \} \equiv \mathbf{8} \pmod{16} \\ \dots \\ \{ \dots, \mathbf{-1}, 15, 31, \dots \} \equiv \mathbf{15} \pmod{16} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \dots 7 \\ -8 \dots -1 \end{array}$$

Operace násobení

Obecný postup

- násobení ve dvojkové soustavě
- výsledek vyžaduje dvojnásobnou přesnost

Specifický postup

- reprezentace ve dvojkovém doplňku
 - ♦ znaménkově rozšířit operandy na výslednou přesnost
 - ♦ uvažovat pouze počet bitů výsledné přesnosti

Příklad operace násobení

Ve dvojkovém doplňku

$$\blacksquare 3_{10} \times -5_{10} = 11110001_2$$

```
  0011
× 1011
-----
  0011
 0011
 0000
 0011
-----
0100001
```

Po rozšíření operandů

```
      0000 0011
× 1111 1011
-----
      0000 0011
      0000 0011
      0000 0000
      0000 0011
      0000 0011
      0000 0011
      0000 0011
      0000 0011
-----
      0000 101111 0001
```

Problémy s násobením

Dvojnásobná přesnost operandů

- dvojnásobný počet součtů
- úspornější postup bez rozšíření
 - ♦ mezisoučet se posouvá vpravo
 - ♦ poslední mezisoučet se přičte/odečte podle znaménka

Sekvenční postup

- záležitost obvodové realizace
- Boothův algoritmus
 - ♦ počet součtů ~ počet nenulových bitů násobitele
 - ♦ omezení počtu součtů, posuny “levné”

Příklad operace násobení bez rozšíření

Ve dvojkovém doplňku

▪ $3_{10} \times -5_{10} = 11110001_2$

0011	
× 1011	
<hr/>	
0000 0000	... počáteční stav
0011 0000	... přičíst násobenec
0001 1000	... aritmetický posun vpravo
0100 1000	... přičíst násobenec
0010 0100	... aritmetický posun vpravo
0010 0100	... ignorovat násobenec
0001 0010	... aritmetický posun vpravo
1110 0010	... odečíst násobenec (znaménko)
<hr/>	
1111 0001	... aritmetický posun vpravo (výsledek)

Operace dělení

Obecný postup

- pouze přirozená čísla, výsledkem podíl a zbytek
 - ♦ znaménko výsledku odpovídá znaménkům operandů
 - ♦ znaménko zbytku odpovídá znaménku dělence
- dělení ve dvojkové soustavě
 - ♦ postupné odečítání dělitele od nejvyššího řádu dělence
- obvodová realizace
 - ♦ dělení s návratem, dělení bez návratu
 - ♦ rychlé dělení
- dělení nulou
 - ♦ neplatná operace

Příklad operace dělení

Přirozená čísla

- $11_{10} \div 2_{10} = 0101_2 (0001_2)$

$$1011 \div 10 =$$

$$\begin{array}{r} - 1000 \\ \hline \end{array}$$

0011

$$\begin{array}{r} - 0100 \\ \hline \end{array}$$

0011

$$\begin{array}{r} - 0010 \\ \hline \end{array}$$

0001

1 ... odečíst dělitel

... zbytek

0 ... nelze odečíst, posunout

... zbytek

1 ... odečíst dělitel

... zbytek

Operace porovnávání

Obecný postup

- odečíst operandy A , B
- test znaménka a nulovosti výsledku $A - B$

Specifický postup

- přirozená čísla
 - ♦ pokud $A > B$, výsledek je kladný
 - ♦ pokud $A < B$, dojde k přetečení
- celá čísla

Aritmetika s pohyblivou řádovou čárkou

Základní operace

- sčítání, odčítání, násobení, dělení

Odlišnosti od operací s reálnými čísly

- ztráta asociativity a distributivity
- ztráta přesnosti při operacích

Operace sčítání a odčítání

Obecný postup

$$A = M_1 \times z^{\text{exp}_1} \quad B = M_2 \times z^{\text{exp}_2}$$

- pokud $\text{exp}_1 \neq \text{exp}_2$
 - ♦ denormalizovat jeden z operandů
- pokud $\text{exp}_1 = \text{exp}_2$

- ♦ provést operaci s mantisami

$$A + B = (M_1 + M_2) \times z^{\text{exp}_1}$$

$$A - B = (M_1 - M_2) \times z^{\text{exp}_1}$$

- normalizovat výsledek

Příklad operace sčítání

Obecný postup

- $3,25 \times 10^3 + 2,63 \times 10^{-1}$

$$\begin{array}{r} 3,25 \times 10^3 \\ + 2,63 \times 10^{-1} \end{array}$$

- denormalizace

$$\begin{array}{r} 3,250000 \times 10^3 \\ + 0,000263 \times 10^3 \end{array}$$

- součet

$$3,250263 \times 10^3$$

- normalizace

Operace sčítání a odčítání (FP)

Dvojková reprezentace s pohyblivou ř. čárkou

- zvyšovat exponent menšího čísla
 - ♦ posun řádové čárky vlevo, resp. operandu vpravo
 - ♦ při ztrátě přesnosti se ztrácí nejméně významné bity
 - ♦ co když se exponenty liší o více než přesnost p ?
- po normalizaci nutno zaokrouhlit
 - ♦ zaokrouhlení může číslo denormalizovat
- kontrola přetečení/podtečení
 - ♦ operace s mantisami, denormalizace, normalizace

Příklad operace sčítání (FP)

Dvojková reprezentace s pohyblivou ř. čárkou

- $0,5 - 0,4375$ při přesnosti $p=4$

$$1,000 \times 2^{-1}$$

$$-1,110 \times 2^{-2}$$

- denormalizace

$$1,000 \times 2^{-1}$$

$$-0,111 \times 2^{-1}$$

- součet

$$0,001 \times 2^{-1}$$

- normalizace, zaokrouhlení

$$1,000 \times 2^{-4}$$

- výsledek 0.0625

Operace násobení a dělení

Obecný postup

$$A = M_1 \times z^{\text{exp}_1} \quad B = M_2 \times z^{\text{exp}_2}$$

- násobení

$$A \cdot B = (M_1 \cdot M_2) \times z^{\text{exp}_1 + \text{exp}_2}$$

- dělení

$$A / B = (M_1 / M_2) \times z^{\text{exp}_1 - \text{exp}_2}$$

- normalizace

Příklad operace násobení

Obecný postup

- $1,11 \times 10^{10} \cdot 9,2 \times 10^{-5}$
- součet exponentů
 $\text{exp} = 10 + (-5) = 5$

- součin mantis

$$\begin{array}{r} 1,11 \\ \times 9,20 \\ \hline 10,2120 \end{array}$$

- výsledek
 $10,212 \times 10^5$
- normalizace
 $1,0212 \times 10^6$

Operace násobení a dělení (FP)

Dvojková reprezentace s pohyblivou ř. čárkou

- po normalizaci nutno zaokrouhlit
 - ♦ zaokrouhlení může číslo denormalizovat
- kontrola přetečení/podtečení
 - ♦ operace s mantisami a exponenty, normalizace
- aproximace dělení
 - ♦ místo a / b se provádí $a \cdot 1 / b$

Příklad operace násobení (FP)

Dvojková reprezentace s pohyblivou ř. čárkou

- $0,5 \times 0,4375$ při přesnosti $p=4$

$$1,000 \times 2^{-1}$$

$$-1,110 \times 2^{-2}$$

- součet exponentů

$$\text{exp} = -3$$

- součin mantis

$$\begin{array}{r} 1,000 \\ \times 1,110 \\ \hline 1,110000 \end{array} \times 2^{-3}$$

- normalizace, zaokrouhlení, znaménko

$$-1,110 \times 2^{-3} = -0,21875$$

Zaokrouhlování při FP operacích

Různé způsoby pro různé situace

- směrem k $+\infty$
- směrem k $-\infty$
- směrem k nule
- směrem k nejbližší hodnotě

Vznik chyb při FP operacích

Výjimečné stavy

- overflow – přetečení
- underflow – podtečení
- divide by zero – dělení nulou
- invalid – neplatná operace
- inexact – nepřesný výsledek

Numerické chyby

- truncation error – zanedbání části čísla
- rounding error – zaokrouhlení