

MAII, LETNÍ SEMESTR 2004-2005

Cvičení č. 7

Konvergence posloupností a řad funkcí I

A. Posloupnosti funkcí.

Stejnomořnou konvergenci posloupnosti funkcí vyšetřujeme podle následujícího schématu: nejprve najdeme bodovou limitu (je-li to možné) a určíme oblast bodové konvergence. Potom vyšetříme stejnomořnou konvergenci pomocí následující věty.

Věta. (*ekvivalentní charakterizace stejnomořné konvergence*) Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a nechť $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované na M . Pak platí

$$f_n \Rightarrow f \text{ na } M \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|f_n(x) - f(x)|; x \in M\} = 0.$$

Jestliže oblast stejnomořné konvergence nesplývá s oblastí bodové konvergence, musíme vyšetřit oblast lokálně stejnomořné konvergence (najdeme “podezřelé” body a pokusíme se dokázat lokálně stejnomořnou konvergenci na jejich doplňku.

Příklad 1. Vyšetřete stejnomořnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n} \quad \text{na intervalu } x \in [0, \infty).$$

Řešení. Bodovou limitou posloupnosti f_n je funkce $f(x) := \max\{1, x\}$. Vyšetříme stejnomořnou konvergenci. Jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \sup_{x \in [0, 1)} (\sqrt[n]{1+x^n} - 1), \sup_{x \in (1, \infty)} (\sqrt[n]{1+x^n} - x) \right\}.$$

Zatímco výraz $\sqrt[n]{1+x^n} - 1$ je zřejmě rostoucí v x , výraz $\sqrt[n]{1+x^n} - x$ je naopak klesající v x , jak se lze přesvědčit odstraněním odmocnin. Tudíž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} - 1 = 0.$$

Posloupnost f_n tedy konverguje k funkci f stejnomořně na $[0, \infty)$.

Příklad 2. Vyšetřete stejnomořnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) := x^n - x^{2n} \quad \text{na intervalu } x \in [0, 1].$$

Řešení. Bodovou limitou posloupnosti f_n je (identicky nulová) funkce $f(x) \equiv 0$. Pro každé pevné $n \in \mathbb{N}$ nalezneme supremum funkce $f_n(x)$ na intervalu $x \in [0, 1]$. Jest

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1} (1 - 2x^{n-1}),$$

takže

$$f'_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{nebo} \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Snadno se přesvědčíme, že bod $x_n := \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ je bodem maxima funkce f_n . Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \right] = \frac{1}{4} \neq 0,$$

a tedy $f_n \not\rightarrow f$ na $[0, 1]$. Protože problematické body x_n splňují

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

je rozumné se domnívat, že $f_n \rightrightarrows^{\text{loc}} f$ na $[0, 1)$. Vskutku, tomu je ekvivalentní tvrzení, že $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[0, a]$ pro každé $a \in (0, 1)$.

Zvolme tedy nějaké a . Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n > a$ pro každé $n \geq n_0$. Pro každé takové n je pak tedy $f'_n \geq 0$ na celém intervalu $[0, a]$, takže

$$\sup_{x \in [0, a]} f_n(x) = f_n(a) = a^n - a^{2n} = a^n (1 - a^n) \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0,$$

a tedy, podle výše uvedené věty, $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[0, a]$.

Závěr: $f_n \rightarrow f$ na $[0, 1]$, $f_n \not\rightarrow f$ na $[0, 1]$, ale $f_n \rightrightarrows^{\text{loc}} f$ na $[0, 1)$.

Příklady k procvičení. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí na zadaných intervalech.

- (1) $f_n(x) := \frac{nx}{1+n+x}, \quad x \in [0, 1]$
- (2) $f_n(x) := x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0, 1]$
- (3) $f_n(x) := \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, \infty)$
- (4) $f_n(x) := \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0, \infty)$
- (5) $f_n(x) := \arctg(nx), \quad x \in \mathbb{R}$
- (6) $f_n(x) := x \arctg(nx), \quad x \in \mathbb{R}$
- (7) $f_n(x) := \sin(x/n), \quad x \in \mathbb{R}$
- (8) $f_n(x) := \frac{\sin x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$

B. Řady funkcí – Weierstrassovo kritérium.

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde f_n jsou definovány na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$, je *bodově konvergentní na M* (respektive *stejně konvergentní na M* respektive *lokálně stejnoměrně konvergentní na M* , jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^n f_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ je bodově, respektive stejnoměrně, respektive lokálně stejnoměrně konvergentní na M).

Věta. (*Weierstrassovo kritérium*) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí definovaných na množině M a nechť pro

$$s_n = \sup \{|f_n(x)|, x \in M\}$$

platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty.$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M .

Příklad 3. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx} - e^{-(n+1)x}}{n^{\frac{1}{7}}} \quad \text{na intervalu } x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jest

$$f'_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^{\frac{1}{7}}} (-n + (n+1)e^{-x}),$$

takže

$$f'_n(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \log \frac{n+1}{n}.$$

Dále platí

$$a_n := f_n(x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n^{\frac{1}{7}}(n+1)}.$$

Tudíž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, a tedy řada konverguje stejnoměrně na \mathbb{R} podle Weierstrassova kritéria.

Příklady k procvičení. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí na zadaných intervalech.

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), \quad x \in [-1, 1]$$

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{n^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$(18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{x^2 + n^3} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n (1-x)^n, \quad x \in [0, 1]$$

$$(20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{x^4}{n} \right) \frac{1}{n}, \quad x \in [0, 1]$$