

MAII, LETNÍ SEMESTR 2004-2005

Cvičení č. 6

Aplikace určitého integrálu

(i) *Délka křivky.* Nechť $f \in C^1([a, b])$. Délka křivky dané grafem funkce f na intervalu $[a, b]$ je číslo

$$L(f) := \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Zobecnění pro parametricky zadané křivky v \mathbb{R}^n . Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1([a, b])$. Délka křivky dané parametrizací $\varphi(t)$ je číslo

$$L(\varphi) := \int_a^b \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) \cdots + \varphi_n^2(x)} dx.$$

Polární souřadnice. Speciálním případem parametrického zadání křivek jsou tzv. polární souřadnice v \mathbb{R}^2 :

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad r \in [0, \infty), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Potom platí

$$r = x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} t = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Délka křivky zadané polárními souřadnicemi. Dokažte si jako cvičení, že je-li křivka zadaná polární rovnicí

$$r = f(t), \quad \text{kde } t \in [\alpha, \beta] \text{ a } f \text{ je nějaká nezáporná funkce na } [\alpha, \beta],$$

pak je její délka rovna číslu

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(t) + (r'(t))^2} dt.$$

Příklad 1. Spočtete obvod kružnice zadané obecnou rovnicí

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0.$$

Pak spočtete obvod téže kružnice použitím její polární rovnice

$$r = a.$$

Úskalí 1. Pozor na eliptické integrály! Pokuste se stejně jako v předchozím příkladu spočítat obvod elipsy zadané rovnicemi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad a, b > 0,$$

1

respektive její polární rovnici

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos t},$$

kde e je excentricita elipsy a $x = d$ je její řídící přímka. Proč nejde obvod přesně spočítat?

Příklad 2. Spočítejte obsah plochy v \mathbb{R}^2 vymezené křivkami

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = 3, \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{\sqrt{x}}{1+x} \quad t \in [0, 2\pi].$$

(ii) *Obsah plochy sevřené polární křivkou.* Je-li křivka zadaná polární rovnicí

$$r = f(t), \quad \text{kde } t \in [\alpha, \beta] \text{ a } f \text{ je nějaká nezáporná funkce na } [\alpha, \beta],$$

pak je plocha ohraničená grafem křivky a polárními “paprsky” $t = \alpha$, $t = \beta$ rovna číslu

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2(t)}{2} dt.$$

Příklad 3. Vypočítejte obsah plochy, která se nachází uvnitř kruhu $r(t) = 3 \sin t$ a zároveň vně kardioidy $r(t) = 1 + \sin t$.

Řešení. Nejprve spočítáme hodnotu parametru t , pro kterou se obě hraniční křivky protnou. Vyjdou nám hodnoty $t = \frac{\pi}{6}$ a $t = \frac{5\pi}{6}$. Pak již můžeme spočítat obsah podle vzorce, přičemž využijeme symetrie zadané plochy podle svislé osy odpovídající paprsku $t = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin^2 t \, dt - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t)^2 \, dt \right] = \dots = \pi.$$

Úskalí 2. Pozor při hledání průsečíků na nejednoznačně zadané body!

V polárních souřadnicích nejsou body v \mathbb{R}^2 zadány jednoznačně. Tento fakt může velice zkomplikovat hledání průsečíků dvou křivek. Například v předcházejícím příkladě mají obě křivky ještě třetí průsečík (nakreslete si obrázek!), a to počátek. Ten však nemá žádnou polární reprezentaci, která by vyhovovala oběma rovnicím.

(iii) *Objem a povrch rotačního tělesa.* Nechť $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$. Nechť

$$T = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), \quad x \in [a, b] \right\}.$$

Pak objem tělesa T je číslo

$$V(T) := \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak povrch pláště tělesa T je číslo

$$S(T) := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 4. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací plochy sevřené zadanými křivkami okolo zadané přímky:

$$y = x, \quad y = x^2, \quad \text{okolo přímky } x = -1.$$

Řešení. Objem vypočítáme podle vzorce

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(y) dy,$$

kde $A(y)$ je obsah řezu tělesem ve výšce y a α, β jsou hodnoty x , pro které se obě hraniční křivky protnou. Tedy máme

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Plochu řezu pro pevné $y \in [0, 1]$ stanovíme podle vzorce

$$A(y) = \pi (\text{vnější poloměr})^2 - \pi (\text{vnitřní poloměr})^2,$$

tedy v našem případě

$$A(y) = \pi (1 + \sqrt{y})^2 - \pi (1 + y)^2.$$

Celkem tedy máme

$$V = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{y})^2 - \pi (1 + y)^2 \right] dy = \dots = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 5. Spočtete objem a povrch kužele vzniklého rotací grafu funkce

$$f(x) = \frac{rx}{h}, \quad x \in [0, h],$$

kolem osy x .

Příklad 6. Spočtete objem a povrch “nekonečného trychtýře” vzniklého rotací grafu funkce

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \infty],$$

kolem osy x .

Příklad 7. Oblouk paraboly $y = x^2$ mezi body $[1, 1]$ a $[2, 4]$ rotuje kolem osy y . Spočtete obsah vzniklé plochy.

Řešení. Podle vzorce pro povrch rotačního tělesa (upraveného pro rotaci kolem osy y) máme

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \dots = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

(iv) *Integrální kritérium konvergence řad.* Nechť f je nezáporná, rostoucí a spojitá funkce na intervalu $[n_0, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Příklad 8. Vyšetřete konvergenci řady (v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}.$$

(v) *Sčítání nekonečných řad.*

Příklad 9. Spočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

kde

$$s_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}.$$

Řešení. Protože

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n},$$

máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Příklady k procvičení.

(i) Vypočtěte délku následujících křivek v \mathbb{R}^2 :

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{\log y}{2}, \quad 1 \leq y \leq e;$$

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3), \quad 1 \leq y \leq 9; \quad \left[\frac{32}{3} \right]$$

$$y = \frac{x^5}{6} + \frac{1}{10x^3}, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad \left[\frac{1261}{240} \right]$$

$$y = x^2 - \frac{1}{8}\log(x), \quad 1 \leq x \leq a, \quad a > 1; \quad \left[a^2 + \frac{1}{8}\log a - 1 \right]$$

$$y = \log x, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{3};$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\text{astroida});$$

(ii) Vypočtěte délku křivek zadaných v polárních souřadnicích v \mathbb{R}^2 následujícími rovnicemi:

$$r = \frac{1}{t}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi;$$

$$r = \sin^3\left(\frac{t}{3}\right), \quad 0 \leq t \leq \pi;$$

$$r = 1 + \cos t \quad (\text{kardioida}).$$

(iii) Vypočtěte obsah plochy sevřené následujícími křivkami:

$$y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 8;$$

$$y = x^2, \quad x + y = 2;$$

$$ax = y^2, \quad ay = x^2;$$

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad y = 0;$$

$$y = \sin x, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad x = 2;$$

$$y = |x|, \quad y = x^2 - 2.$$

(iv) Načrtněte grafy křivek zadaných v polárních souřadnicích v \mathbb{R}^2 následujícími rovnicemi a vypočtěte obsah plochy jimi sevřené:

$$r = \sin(2t);$$

$$r^2 = 4\cos(2t);$$

$$r = 3(1 + \cos(t));$$

$$r = 2\cos(3t);$$

$$r = 2\cos t - \frac{1}{\cos t} \quad (\text{strofoida}).$$

(v) Vypočtete obsah plochy ležící uvnitř první polární křivky a vně druhé polární křivky:

$$\begin{aligned} r &= 4 \sin t, \quad r = 2; \\ r &= 1 - \sin t, \quad r = 1; \\ r^2 &= 8 \cos(2t), \quad r = 2; \\ r &= 1 + \cos t, \quad r = 3 \cos t. \end{aligned}$$

(vi) Vypočtete obsah plochy ležící uvnitř obou polárních křivek:

$$\begin{aligned} r &= \sin t, \quad r = \cos t; \\ r &= \sin(2t), \quad r = \cos(2t); \\ r &= 3 + 2 \sin t, \quad r = 2; \\ r^2 &= 2 \sin(2t), \quad r = 1. \end{aligned}$$

(vii) Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací plochy sevřené zadanými křivkami okolo zadané přímky:

$$\begin{aligned} y &= x^2, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad \text{okolo osy } x; \\ y &= e^x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad \text{okolo osy } x; \\ y &= x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y = 4, \quad x = 0 \quad \text{okolo osy } y; \\ y &= x, \quad y = \sqrt{x}, \quad \text{okolo přímky } y = 1; \end{aligned}$$

(viii) Vypočtete povrch plochy vzniklé rotací zadané křivky okolo zadané přímky:

$$\begin{aligned} y &= e^x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{okolo osy } x; \quad \left[\pi \left[e\sqrt{1+e^2} + \log(e + \sqrt{1+e^2}) - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} + 1) \right] \right] \\ y &= x^3, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad \text{okolo osy } x; \\ y &= \sqrt{4-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \text{okolo osy } x; \quad [8\pi] \\ y &= \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leq y \leq 2 \quad \text{okolo osy } y; \quad \left[\frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}) \right] \\ x &= \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{2}, \quad a > 0 \quad \text{okolo osy } y. \quad [\pi a^2] \end{aligned}$$

(ix) Vyšetřete konvergenci následujících řad pomocí integrálního kritéria:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}; \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n (1 + n^2)^q, \quad q \in \mathbb{R}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

(x) Spočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

kde

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}; & \left[\frac{\pi}{4} \right] \\ s_n &= \frac{1}{n} \left(\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \cdots + \sin \left((n-1) \frac{\pi}{n} \right) \right); & \left[\frac{2}{\pi} \right] \\ s_n &= \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p > 0; & \left[\frac{1}{p+1} \right] \\ s_n &= \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; & \left[\frac{1}{e} \right] \end{aligned}$$