

MAII, LETNÍ SEMESTR 2004-2005

Cvičení č. 5

Určitý integrál

Pozor na důležitý rozdíl: primitivní funkce je **třída funkcí**; určitý integrál je **číslo**

Typy určitého integrálu: Riemannův, Newtonův, Lebesgueův ...

Výpočet Newtonova integrálu:

$$(N) \int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+) = \lim_{x \rightarrow b+} F(x) - \lim_{x \rightarrow a-} F(x), \quad \text{kde } F' = f.$$

Metoda per partes pro Newtonův integrál (budeme vynechávat symbol (N) před integrálem): $F' = f$, $G' = g$, f, g spojitě, pak

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx$$

Příklad 1.

$$\int_{1/e}^e |\log x| dx.$$

První substituční metoda pro Newtonův integrál: $\int_a^b f(x) dx$ převedeme na tvar $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$ pro nějakou funkci φ , pak

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy,$$

přičemž

$$y = \varphi(x), \quad dy = \varphi'(x) dx, \quad x = a \Leftrightarrow y = \alpha, \quad x = b \Leftrightarrow y = \beta,$$

kde

$$\alpha = \varphi(a), \quad \beta = \varphi(b).$$

Příklad 2.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Druhá substituční metoda pro Newtonův integrál: $\int_a^b f(x) dx$ převedeme na tvar $\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ pomocí substituce

$$x = \varphi(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \quad dx = \varphi'(t) dt, \quad \varphi' \neq 0, \quad x = a \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(a), \quad x = b \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(b),$$

kde

$$\alpha = \varphi(a), \quad \beta = \varphi(b).$$

Příklad 3. Vypočítejte obsah elipsy dané osovou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

POZOR na čtená úskalí při používání substituce! Substituci nelze užívat bezhlavě. Zejména je třeba dávat pozor na splnění předpokladů substitučních metod a na intervaly, na nichž se pohybují jednotlivé proměnné.

Úskalí 1.

$$\int_{-1}^1 dx = 2,$$

ale při (nesprávném) užití substituce

$$t = x^{\frac{3}{2}}, \quad x = \sqrt{t^{\frac{2}{3}}}, \quad dx = \frac{3}{2} \sqrt{t} dt \quad x = -1 \Leftrightarrow t = 1, \quad x = 1 \Leftrightarrow t = 1,$$

máme

$$\int_{-1}^1 dx = \int_1^1 \frac{3}{2} \sqrt{t} dt = 0.$$

Úskalí 2.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2},$$

ale při (nesprávném) užití substituce

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \quad x = -1 \Leftrightarrow t = -1, \quad x = 1 \Leftrightarrow t = 1,$$

máme

$$I = -I \Rightarrow I = 0.$$

Úskalí 3. Pro integrál

$$\int_0^3 x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx$$

nelze použít substituci $x = \sin t$!

Úskalí 4. Nelze vždy dosazovat meze do funkcí, je potřeba počítat limity! Příklad:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Úskalí 5. Pozor na divergentní integrály! Příklad nesprávného výpočtu:

$$\int_{-3}^2 \frac{dx}{x} = [\log |x|]_{-3}^2 = \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3}.$$

Příklady k procvičení.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx && \left[\frac{1}{4} \right] \\
& \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{-2-2x^2} \, dx && \left[\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] \\
& \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \, dx && [4 - 2 \log 2] \\
& \int_0^1 x (2-x^2)^{12} \, dx && \left[315 \frac{1}{26} \right] \\
& \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1} \, dx \\
& \int_1^\infty \frac{x}{x^2+x+1} \, dx && \left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right] \\
& \int_0^1 \arccos x \, dx && [1] \\
& \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} \\
& \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx && \left[\frac{a^3}{3} \right] \\
& \int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx \\
& \int_0^\pi x \sin x \, dx \\
& \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg}^3 x \, dx \\
& \int_{-1}^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx \\
& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{1+x^6} \, dx \\
& \int_0^a x \sqrt{a^2 + x^2} \, dx
\end{aligned}$$