

MAII, LETNÍ SEMESTR 2004-2005

Cvičení č. 4

Primitivní funkce – integrace funkcí obsahujících odmocniny

(i) Integraci funkcí ve tvaru

$$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad \neq bc, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

převědeme na integraci racionálních funkcí pomocí substituce

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Potom máme

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}, \quad dx = mt^{m-1} \frac{ad - bc}{(a - ct^m)^2} dt$$

Příklad 1.

$$(1) \quad \int \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x} dx.$$

(ii) Integraci funkcí ve tvaru

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

provádíme podle následující osnovy.

1. případ: $ax^2 + bx + c$ má dva různé reálné kořeny $x_1 < x_2$, $a < 0$. V tomto případě hledáme primitivní funkci na intervalu (x_1, x_2) , přičemž máme dvě možnosti: BUĎ píšeme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}(x_2 - x) \sqrt{\frac{x - x_1}{x_2 - x}},$$

což vede na integraci funkce tvaru probraného v (i),
NEBO píšeme

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \quad \text{kde } D = b^2 - 4ac,$$

a pak použijeme substituci

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{-2a}$$

což vede na integraci funkce tvaru ve tvaru

$$R(t, 1 - t^2),$$

kterou lze spočítat například pomocí substituce $t = \sin y$.

Příklad 2.

$$(2) \quad \int x \sqrt{6 + x - x^2} dx.$$

2. případ: $ax^2 + bx + c$ nemá reálný kořen.

3. případ: $ax^2 + bx + c$ má dva různé reálné kořeny $x_1 < x_2$, $a > 0$.

Oba tyto případy řešíme stejnou metodou, a to na intervalech $x \in (-\infty, x_1)$ a $x \in (x_2, \infty)$ v případě 2, a na intervalu \mathbb{R} v případě 3. (Povšimněme si, že v případě 3 musí nutně platit $a > 0$, protože by jinak integrand nebyl nikde definován.)

Použijeme tzv. *Eulerovu substituci*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x,$$

pro kterou platí

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b},$$

a která tedy vede na integraci racionální funkce.

Příklad 3.

$$(3) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Příklady k procvičení.

$$(5) \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

$$(6) \quad \int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} dx$$

$$(7) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 \sqrt[3]{x-1}} dx$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

$$(9) \quad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(10) \quad \int \sqrt{-x^2 + 5x - 4} dx$$

$$(11) \quad \int x \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$(12) \quad \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x} dx$$