

Stejněměrná konvergence posloupností a řad funkcí II

C. Abelovo a Dirichletovo kritérium a věty o záměně sumy a derivace.

Také u stejnoměrné konvergence řady funkcí nejprve najdeme bodovou limitu (je-li to možné) a určíme oblast bodové konvergence. Potom vyšetřujeme stejnoměrnou nebo lokálně stejnoměrnou konvergenci. Je-li řada konvergentní stejnoměrně i absolutně, obvykle stačí použít Weierstrassova kritéria. Jestliže řada konverguje stejnoměrně, ale neabsolutně, je třeba použít jiných kritérií, v našem případě nejčastěji Dirichletova a nebo Abelova.

**Věta. (Abelovo kritérium)** Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$  na neprázdné množině  $M \subset \mathbb{R}$ . Nechť  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí stejnoměrně omezená na  $M$ . Nechť je pro každé pevné  $x \in M$  posloupnost čísel  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  monotónní vzhledem k  $n$  (neklesající nebo nerostoucí). Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \Rightarrow \quad \text{na } M.$$

**Věta. (Dirichletovo kritérium)** Nechť má posloupnost  $f_n$  funkcí definovaných na neprázdné množině  $M \subset \mathbb{R}$  stejnoměrně omezené částečné součty, tedy posloupnost

$$\left\{ \sum_{k=1}^n f_k \right\}_{n=1}^{\infty}$$

je stejnoměrně omezená na  $M$ . Nechť  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí definovaných na  $M$ , splňující

$$g_n(x) \Rightarrow 0, \quad x \in M.$$

Nechť je pro každé pevné  $x \in M$  posloupnost čísel  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  monotónní vzhledem k  $n$  (neklesající nebo nerostoucí). Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \Rightarrow \quad \text{na } M.$$

Často je úloha formulována tak, že je třeba dále vyšetřit spojitost limitní funkce (funkce definované řadou) nebo vyšetřit existenci její derivace v nějakém bodě nebo na nějakém intervalu, tuto derivaci spočítat, a nebo řadu přímo sečíst. V takových případech obvykle kombinujeme některé z výše uvedených kritérií s větou o záměně sumy a derivace.

**Věta. (o záměně sumy a derivace)** Nechť  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  je řada funkcí majících vlastní derivace na intervalu  $(a, b)$  a nechť existuje tzv. "záchytný bod"  $x_0 \in (a, b)$  takový, že řada čísel  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$  konverguje. Jestliže platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k \Rightarrow^{\text{loc}} \quad \text{na } (a, b),$$

pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow{\text{loc}} \text{ na } (a, b)$$

a pro  $x \in (a, b)$  platí

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

**Věta.** (*ekvivalentní charakterizace stejnoměrné konvergence*) Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina a nechť  $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ , jsou funkce definované na  $M$ . Pak platí

$$f_n \Rightarrow f \text{ na } M \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|f_n(x) - f(x)|; x \in M\} = 0.$$

Jestliže oblast stejnoměrné konvergence nesplývá s oblastí bodové konvergence, musíme vyšetřit oblast lokálně stejnoměrné konvergence (najdeme “podezřelé” body a pokusíme se dokázat lokálně stejnoměrnou konvergenci na jejich doplňku.

**Příklad 1.** Nechť funkce  $f$  je definována jako součet řady

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left( \frac{10x}{n^2} \right).$$

Určete definiční obor funkce  $f$ , obor spojitosti a rozhodněte, jestli existuje  $f'(0)$ . Pokud ano, tuto derivaci spočítejte.

**Řešení.** Položme

$$f_n(x) = (-1)^n \sin \left( \frac{10x}{n^2} \right), \quad h_n(x) \equiv (-1)^n, \quad g_n(x) = \sin \left( \frac{10x}{n^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Potom má posloupnost  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$  omezené částečné součty. Posloupnost  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  sice nespĺňuje  $g_n \Rightarrow 0$  na  $\mathbb{R}$  (protože ke každému  $n \in \mathbb{N}$  lze najít  $x \in \mathbb{R}$  takové, že  $\sin \left( \frac{10x}{n^2} \right) = 1$ ), dokážeme ale, že splňuje alespoň  $g_n \xrightarrow{\text{loc}} 0$  na  $\mathbb{R}$ . Nechť  $K \in (0, \infty)$ . Potom lze najít  $n_0 \in \mathbb{N}$  dostatečně veliké k tomu, aby pro všechna  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$  a pro všechna  $x \in [-K, K]$  platilo  $\frac{10x}{n^2} \leq \frac{\pi}{2}$ . Odtud plyne, že

$$\sup_{x \in [-K, K]} |g_n(x)| = \sin \left( \frac{10K}{n^2} \right) \leq \frac{10K}{n^2} \rightarrow 0,$$

a tedy  $g_n \Rightarrow 0$  na  $[-K, K]$ , jinými slovy  $g_n \xrightarrow{\text{loc}} 0$  na  $\mathbb{R}$ . Podle Dirichletova kritéria je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{\text{loc}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podle důsledku Mooreovy–Osgoodovy věty je funkce  $f$  spojitá na  $\mathbb{R}$ . Dále jest

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n 10}{n^2} \cos \left( \frac{10x}{n^2} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$|f'_n(x)| \leq \frac{10}{n^2} \rightarrow 0.$$

Podle Weierstrassova kritéria tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n \overset{\text{loc}}{\Rightarrow} f', \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Navíc v ‘záchytném’ bodě  $x_0 := 0$  platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = 0,$$

takže podle věty o záměně sumy a derivace máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\Rightarrow} f, \quad \text{na } \mathbb{R},$$

a navíc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy speciálně pro  $x = 0$  jest

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(0) = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{5\pi^2}{6}.$$

Poslední rovnost lze získat například následujícím výpočtem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

**Příklad 2.** Určete definiční obor funkce  $f$  a spočtěte  $f'$  všude, kde existuje.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - |x|)^n}{n}.$$

**Příklad 3.** Vyšetřete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt[n]{n}x}{1 + n^4 x^3} \right)$$

konverguje stejnoměrně na  $\mathbb{R}$ .

**Příklad 4.** Vyšetřete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}$$

konverguje stejnoměrně na intervalu  $[-1, 1]$ . Označme součet řady v bodě  $x$  jako  $f(x)$ . Spočítejte  $f'(0)$ .

**Příklad 5.** Vyšetřete, zda řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n+1/2} \sin\left(\frac{x}{\pi^n}\right)$$

konverguje stejnoměrně na intervalu  $[-10, 10]$ . Pro  $x \in [-10, 10]$  definujme  $f(x)$  jako součet výše uvedené řady. Vypočítejte  $f'(0)$ .

**Příklad 6.** Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$$

derivaci v bodě 0.

**Příklad 7.** Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^4}{n}\right) \frac{1}{n} \quad \text{spojitá na intervalu } [0, 1].$$

**Příklad 8.** Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}.$$

**Příklad 9.** Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}, \quad x \in (0, \infty).$$

**Příklad 10.** Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

**Příklad 11.** Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

tam, kde je to možné.

**Příklad 12.** Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

**Další příklady k procvičení.** Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou, lokálně stejnoměrnou a absolutní konvergenci následujících řad funkcí na zadaných intervalech.

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{x+n}, \quad x \in (0, \infty),$$

$$(14) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1+nx}{n^2-x^2} \quad x \in (0, 2),$$

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n} \operatorname{arctg} n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}, \quad x \in [-1, 1].$$