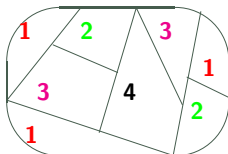


## 8 Rovinnost a kreslení grafů

V přímé návaznosti na předchozí lekci se zaměříme na druhý důležitý aspekt slavného problému čtyř barev, který byl původně formulován pro barevné rozlišení států na politické mapě:



Jak tedy taková obarvovaná politická mapa souvisí s kreslením grafů? Jednoduše – souvislé státy můžeme reprezentovat jako vrcholy grafu a hranami pak zaznamenat „sousednost“ mezi státy. Důležité je, že takto vzniklý graf můžeme zřejmě zakreslit v rovině **bez křížení hran** a nazýváme jej proto *rovinným grafem*.

### Stručný přehled lekce

- Kreslení grafů, definice rovinného grafu a základní vlastnosti.
- Rozpoznávání rovinných grafů (Kuratowského věta).
- Barvení map a rov. grafů - problém čtyř barev a nástin jeho řešení.
- Kreslení grafů s křížením hran – průsečíkové číslo.

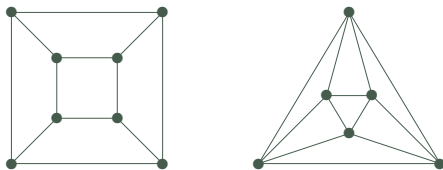
## 8.1 Rovinné kreslení grafu

**Definice 8.1. Rovinným nakreslení** grafu  $G$

myslíme zobrazení, ve kterém jsou vrcholy znázorněny jako různé body v rovině a hrany jako oblouky spojující body svých koncových vrcholů. Přitom hrany se nesmí nikde křížit ani procházet jinými vrcholy než svými koncovými body.

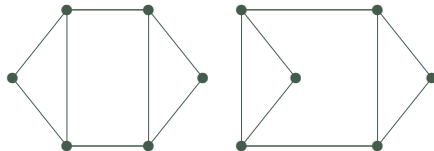
Graf je **rovinný** pokud má rovinné nakreslení.  $\square$

Důležitým příkladem rovinných grafů jsou grafy (třírozměrných Euklidovských) mnohostěnů, třeba graf čtyřštěnu, krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu, atd.



Platí, že grafy mnohostěnů jsou vždy rovinné a 3-souvislé. Naopak každý rovinný 3-souvislý jednoduchý graf je grafem nějakého mnohostěnu. (Důkaz tohoto tvrzení je obtížný.)

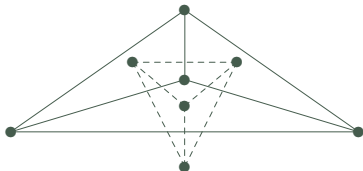
**Definice:** *Stěnamí* rovinného nakreslení grafu nazýváme (topologicky) souvislé oblasti roviny ohraničené tímto nakreslením grafu.



Rovinný graf může mít více *podstatně různých* nakreslení, ale 3-souvislý rovinný graf má ve všech svých rovinných nakresleních „stejně stěny“ (Důsledek 8.11).  $\square$

**Definice.** *Duální (multi)graf* rovinného nakreslení grafu  $G$  získáme tak, že stěny nahradíme vrcholy duálu a hranami spojíme sousedící dvojice stěn.

Duální multigraf k rovinnému grafu je vždy rovinný, což je snadné dokázat. Na druhou stranu však často bude obsahovat násobné hrany a dokonce i smyčky.



Nyní si uvedeme zajímavý a vlastně „jediný rozumný kvantitativní“ vztah o rovinných nakresleních grafů. Jedná se o slavný **Eulerův vztah**, který říká:

**Věta 8.2.** *Nechť rovinné nakreslení souvislého grafu  $G$  má  $f$  stěn. Pak*

$$|V(G)| + f - |E(G)| = 2. \square$$

**Důkaz:** Nechť počet vrcholů v  $G$  je  $v$  a hran  $h$ .

- Pokud je  $G$  strom, tj. nemá kružnice, má ve svém nakreslení jedinou stěnu a dle Věty 4.3 má přesně  $h = v - 1$  hran. Potom platí  $v + f - h = v + 1 - (v - 1) = 2$ .  $\square$
- Pokud  $G$  obsahuje kružnici  $C$ , pak vypustíme jednu její hranu  $e$ . Tím se počet hran sníží o 1, ale zároveň se sníží o 1 počet stěn, protože kružnice  $C$  původně oddělovala (viz Jordanova věta o kružnici) dvě stěny přilehlé k hraně  $e$  od sebe, ale nyní tyto dvě stěny „splynou“ v jednu. Počet vrcholů se nezmění. Proto se nezmění hodnota  $v + f - h = v + (f - 1) - (h - 1) = 2$ .

Tvrzení tak plyne z principu matematické indukce.  $\square$

**Poznámka:** Všimněte si dobře, že Eulerův vztah vůbec nezávisí na tom, jak je graf  $G$  nakreslený, je to vlastnost grafu jako takového.

Tento jednoduše vypadající vztah má mnoho aplikací a důsledků.

**Důsledek 8.3.** *Jednoduchý rovinný graf na  $v \geq 3$  vrcholech má nejvýše  $3v - 6$  hran. Jednoduchý rovinný graf na  $v \geq 3$  vrcholech a bez trojúhelníků má nejvýše  $2v - 4$  hran.*

**Důkaz:** Můžeme předpokládat, že graf je souvislý, jinak bychom přidali další hrany. Necht' počet vrcholů v  $G$  je  $v$ , stěn je  $f$  a hran  $h$ . Jelikož nemáme smyčky ani násobné hrany, má každá stěna v nakreslení grafu na obvodu aspoň 3 hrany, přitom každou hranu započítáme ve dvou přilehlých stěnách. Pak tedy platí  $h \geq \frac{1}{2} \cdot 3f$ , neboli  $\frac{2}{3}h \geq f$ . Dosazením do vztahu Věty 8.2 získáme

$$2 = v + f - h \leq v + \frac{2}{3}h - h = v - \frac{1}{3}h$$

$$h \leq 3(v - 2) = 3v - 6. \square$$

Druhá část se dokazuje obdobně, ale nyní víme, že graf nemá ani trojúhelníky, a tudíž má každá stěna v nakreslení grafu na obvodu aspoň 4 hrany. Pak tedy platí  $h \geq \frac{1}{2} \cdot 4f$ , neboli  $\frac{2}{4}h \geq f$ . Dosazením do vztahu Věty 8.2 získáme

$$2 = v + f - h \leq v + \frac{2}{4}h - h = v - \frac{1}{2}h$$

$$h \leq 2(v - 2) = 2v - 4.$$

Tím jsme hotovi.

$\square$

**Důsledek 8.4.** Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.  
Každý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje vrchol stupně nejvýše 3.  $\square$

**Důkaz:** Pokud by všechny vrcholy měly stupně alespoň 6, celý graf by měl aspoň  $\frac{1}{2} \cdot 6v = 3v$  hran, což je ve sporu s Důsledkem 8.3. Některý vrchol musí tudíž mít menší stupeň než 6.

Obdobně postupujeme u druhého tvrzení.  $\square$

## 8.2 Rozpoznání rovinných grafů

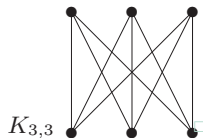
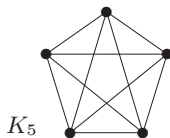
Při praktickém využití rovinných grafů je potřeba umět abstraktně zadaný graf rovinně nakreslit bez křížení hran. Na rozdíl od problému určení barevnosti grafu se naštěstí jedná o efektivně algoritmicky řešitelný problém.  $\square$

První algoritmus běžící v lineárním čase byl podán Hopcroftem a Tarjanem 1974 a od té doby se objevilo několik jednodušších algoritmů, ale stále nejsou dostatečně přístupné, abychom je mohli ukázat v omezeném čase na přednášce.

**Věta 8.5.** *Rozhodnout rovinnost a nalézt příslušné nakreslení daného grafu lze v lineárním čase (vůči počtu vrcholů).*

Místo obecných algoritmů pro rovinné kreslení grafů se zde podíváme na otázku, jak odůvodnit nerovinnost (malého) grafu.

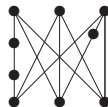
**Příklad 8.6.** Ukažme, že následující dva grafy,  $K_5$  a  $K_{3,3}$  nejsou rovinné.



Při zdůvodnění využijeme znalosti předchozího oddílu. Všimněme si, že graf  $K_5$  má 5 vrcholů a  $10 > 3 \cdot 5 - 6$  hran. Podobně graf  $K_{3,3}$  má 6 vrcholů a  $9 > 2 \cdot 6 - 4$  hran, přitom neobsahuje žádné trojúhelníky. Proto podle Důsledku 8.3 žádný z nich není rovinný.  $\square$

**Důsledek 8.7.** Grafy  $K_5$  a  $K_{3,3}$  nejsou rovinné.  $\square$

**Definice:** *Podrozdělením* grafu  $G$  rozumíme graf, který vznikne z  $G$  nahrazením některých hran novými cestami libovolné délky.

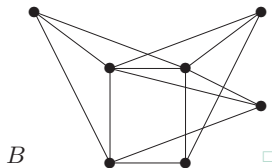
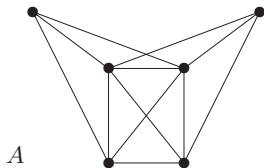


Důležitý abstraktní popis všech rovinných grafů našel K.Kuratowski:

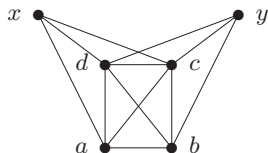
**Věta 8.8.** Graf  $G$  je rovinný právě když neobsahuje podrozdělení grafů  $K_5$  nebo  $K_{3,3}$  jako podgrafy.



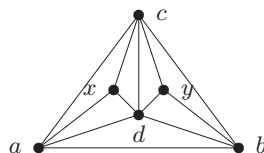
**Příklad 8.9.** Které z následujících dvou grafů jsou rovinné? Najděte rovinné nakreslení (včetně očíslovaných vrcholů), nebo zdůvodněte nerovinnost grafu.



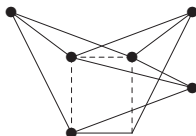
Po chvíli zkoumání určitě přijdeme na to, že graf *A* se dá nakreslit rovinně takto:



→



Graf *B* na druhou stranu rovinný není podle Věty 8.8, protože je v něm obsaženo podrozdělení grafu  $K_{3,3}$ , které je ukázáno na tomto obrázku:



## Jednoznačnost rovinného nakreslení

**Fakt:** V 2-souvislém rovinném grafu je každá stěna ohraničená kružnicí.

Díky tomuto faktu lze snadno nadefinovat, že dvě rovinná nakreslení 2-souvislého grafu jsou *ekvivalentní*, pokud jejich stěny tvoří stejné soubory kružnic. □

Klíčovým výsledkem nyní je:

**Lema 8.10.** *Kružnice  $C$  v 3-souvislém rovinném grafu  $G$  je stěnou jeho nakreslení, právě když podgraf  $G - V(C)$  je souvislý graf.* □

**Důkaz:** V jednom směru, pokud  $G' = G - V(C)$  je souvislý, pak podle Jordanovy věty o kružnici leží celý  $G'$  uvnitř jedné oblasti  $C$ , tudíž druhá oblast  $C$  je stěnou v každém nakreslení  $G$ . □

Naopak pokud  $C$  ohraničuje stěnu v některém rovinném nakreslení grafu  $G$ , dokážeme, že každé dva vrcholy mimo  $C$  lze spojit cestou disjunktní s  $C$ . Nechť tedy  $x, y \in V(G) \setminus V(C)$  a označme  $X$  (či  $Y$ ) množinu těch vrcholů  $C$  dosažitelných z  $x$  (z  $y$ ) po cestách neprocházejících přes  $C$ . Jelikož  $x, y$  náleží stejné stěně kružnice  $C$ , množiny  $X, Y$  se na  $C$  „nepřekrývají“, přesněji je lze od sebe oddělit odebráním některých dvou vrcholů  $c, d \in V(C)$ . Pak však  $\{c, d\}$  je řezem v grafu  $G$  oddělujícím  $x$  od  $y$  a to odporuje předpokladu 3-souvislosti, spor. □

**Důsledek 8.11.** *Každá dvě rovinná nakreslení 3-souvislého grafu jsou ekvivalentní.*

Závěrem si ještě bez důkazu uvedeme, že rovinné grafy vždy mají pěkné nakreslení v rovině.

**Věta 8.12.** *Každý jednoduchý rovinný graf lze nakreslit v rovině (bez křížení hran) tak, že hrany jsou úsečky.*

## 8.3 Barvení map a rovinných grafů

Vzpomeňme si na již zmiňovaný převod mapy na graf – jedná se vlastně o vytvoření duálního grafu k této mapě. Aby v duálním grafu k mapě nevznikly smyčky, v mapě nesmí žádný stát sousedit sám se sebou, což je přirozený požadavek.

V roce 1976 Appel a Haken, a pak znovu v roce 1993 Robertson, Seymour, Sanders a Thomas, dokázali tuto větu, která rozřešila problém čtyř barev a která je jedním z nejslavnějších výsledků diskrétní matematiky vůbec:

**Věta 8.13.** *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 4 barvami.* □

Důkaz této věty je nesmírně složitý (však byl také hledán po více než 100 let a k jeho úplnému provedení je stále třeba počítač), a proto si uvedeme slabší a mnohem jednodušší tvrzení:

**Tvrzení 8.14.** *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 6 barvami.  
Každý rovinný graf bez smyček a bez trojúhelníků lze obarvit 4 barvami.* □

**Důkaz:** Podle Důsledku 8.4 najdeme v každém podgrafu  $G$  vrchol  $v$  stupně nejvýše 5, a tudíž je  $G$  5-degenerovaný a obarvíme jej podle Věty 7.5. Druhou část dokážeme obdobně, když nalezneme vrchol stupně  $\leq 3$ . □

**Věta 8.15.** Každý rovinný graf bez smyček má *výběrovou* barevnost nejvýše 5.  $\square$

**Důkaz** (náznak): Poměrně přímočarou indukcí lze dokázat následující zesílené tvrzení:

*Nechť rovinný graf  $G$  s vnější stěnou ohraničenou kružnicí  $C$  má všechny ostatní stěny trojúhelníky. Nechť každý vrchol mimo  $C$  má přiřazen seznam 5 barev, vrcholy  $C$  mají seznamy 3 barev a jisté dva sousední vrcholy  $x, y$  na  $C$  mají přímo předepsané (různé) barvy. Pak  $G$  lze výběrově obarvit.*

- Nechť  $z \neq y$  je druhý soused  $x$  na  $C$ . Pokud některá hrana  $f$  ze  $z$  nenáležející  $C$  má druhý konec také na  $C$ , pak podél  $f$  „rozdělíme“  $G$  na podgraf  $G_1$  obsahující  $x, y$  a podgraf  $G_2$  sdílející hranu  $f$  s  $G_1$ . Indukcí nejprve obarvíme  $G_1$ , pak  $G_2$  taktéž splní indukční předpoklad a i jej dobarvíme.
- Jinak budeme indukcí barvit podgraf  $G_3 = G - z$ ; přičemž všem sousedům  $z$  uvnitř  $G$  odebereme ze seznamu (jejich pěti) barev dvě z barev seznamu u vrcholu  $z$  různé od barvy  $x$ . Následně dobarvíme vrchol  $z$ , pro nějž máme tři možnosti a jen jeho dva sousedé na  $C$  s ním mohou být v konfliktu.

$\square$

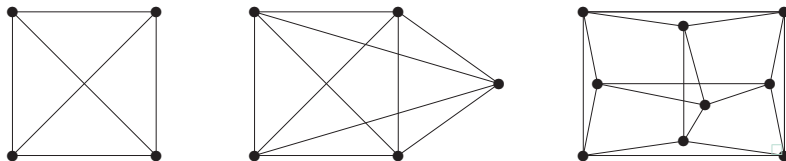
## 8.4 O průsečíkovém čísle grafů

Třebaže již dobře víme (a umíme algoritmicky rozpoznat), které grafy jsou rovinné, praxe požaduje „hezká nakreslení“ i nerovinných grafů do roviny. Jak tedy na **hezká kreslení** nerovinných grafů do roviny? □

**Definice** (rozšíření Definice 8.1):

**Nakreslením** grafu  $G$  do roviny rozumíme zobrazení, ve kterém jsou vrcholům  $G$  přiřazeny různé body roviny a hranám jednoduché křivky spojující koncové vrcholy. Přitom je požadováno, aby se žádné **tři hrany neprotínaly** v jednom bodě (jiném než koncový vrchol), aby žádná **hrana neprocházela** jiným vrcholem a aby se každá protínající dvojice hran skutečně „**křížila**“ (tj. ne jednostranný dotyk). □

**Příklad 8.16.** Podívejme se na následující tři (korektní) nakreslení do roviny. Jsou všechna „optimální“, tj. je počet jejich křížení nejmenší možný?



Snadno vidíme, že první graf lze nakreslit i bez křížení a druhý graf jen s jedním křížením. Naopak třetí graf už s méně kříženími nakreslit nelze. Uměli byste toto dokázat? □

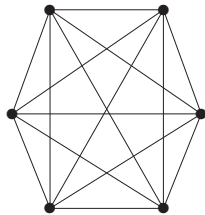
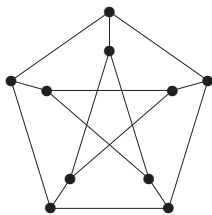
**Definice 8.17. Průsečíkové číslo** grafu  $G$  v rovině

je definováno jako nejmenší možný počet křížení dvojic hran přes všechna korektní nakreslení  $G$  do roviny. Značíme  $cr(G)$ .

Původ problému průsečíkového čísla spadá do doby druhé světové války, kdy P. Turán byl na nucených pracech v cihelně. Jejich úkolem bylo tlačit vozíky s cihlami po kolejnicích a na každé křižovatce s tím měli velké problémy. Proto Turán přemýšlel, jak navrhnout kolejiště lépe, aby minimalizoval počet křížení kolejnic.

V dnešní době je problém průsečíkového čísla velmi důležitý v praktických oblastech VLSI designu [Leighton] a „lidsky čitelné“ vizualizace grafů v různých schématech.

**Příklad 8.18.** Určeme průsečíková čísla následujících dvou grafů:



□

Asi snadno každý nalezne nakreslení prvního grafu (Petersenův) s pouze dvěma křížemi hran. Jak však dokázat, že jej nelze nakreslit s jedním křížením? Všimněme si, že každá jeho hrana je „ekvivalentní“ s každou jinou. To znamená, že by odstraněním jedné zvolené hrany z Petersenova grafu mělo vytvořit rovinný graf, ale to není pravda. □

Druhý graf  $K_6$  lze nakreslit s 3 kříženími – začneme s kružnicí délky 5 a posledním vrcholem spojeným uvnitř. Zbylých 5 hran pak už dokážeme dokreslit s vytvořením tří křížení. Zkuste si to! Proč není možných méně křížení? Předpokládejme, že dvě křížení hran postačují, pak bychom vypuštěním dvou dotčených hran získali rovinný graf. Ten by však měl 6 vrcholů a  $13 > 3 \cdot 6 - 6$  hran, spor. □



**Fakt:** Přesné obecné hodnoty průsečíkových čísel nejsou známy ani pro úplné či úplné bipartitní grafy. □

**Věta 8.19.** *Problém určit, zda průsečíkové číslo  $cr(G) \leq k$  pro  $G$  a  $k$  na vstupu je  $\mathcal{NP}$ -úplný. Toto platí dokonce i když  $G$  je kubický 3-souvislý graf.*

Zamyslete se sami, proč by problém průsečíkového čísla měl vůbec náležet do třídy  $\mathcal{NP}$ , není to tak zřejmé... □

V praxi se ukazuje, že určení průsečíkového čísla je přímo **zoufale těžký** problém, ještě mnohem beznadějnější než třeba barevnost. Snad jediným existujícím „pozitivním“ (i když zcela nepraktickým) algoritmickým výsledkem je následovné:

**Věta 8.20. (Grohe)** *Pro fixní  $k$  lze otestovat, zda  $cr(G) \leq k$ , v polynomiálním kvadratickém čase vzhledem k počtu vrcholů grafu.*

*(2006: Dnes je známo i vylepšení v lineárním čase.)* □

**Poznámka:** Dnes zatím ani nevíme, jak v polynomiálním čase přesně určit průsečíkové číslo grafu, který vznikne z rovinného grafu přidáním jedné hrany! (Umíme jen aproximovat s faktorem daným největším stupněm grafu.)