

9 Krátce o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zaměříme lehce na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci. . .

Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Pochopitelně hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.



Stručný přehled lekce

- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

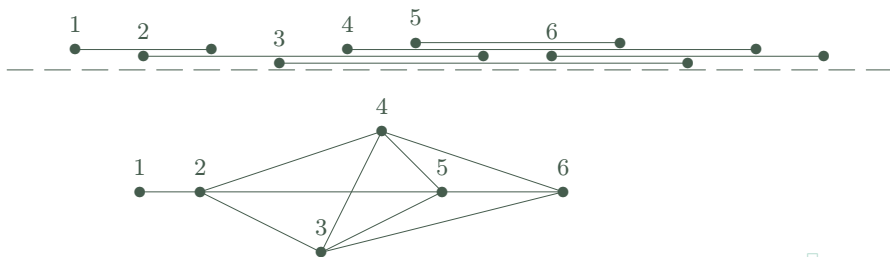
9.1 Intervalové a chordální grafy

Definice 9.1. Průnikovým grafem množinového systému \mathcal{M} nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \{A, B \in \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$.

□

Intervalové grafy

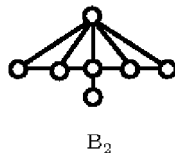
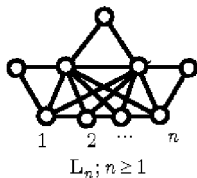
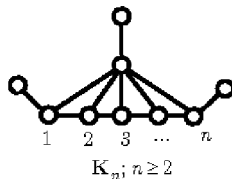
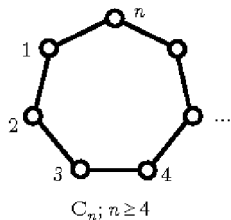
Podívejme se na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka INT).



□

Fakt: Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má **chordu**.

- Intervalové grafy lze popsat následujícími *zakázanými indukovanými podgrafy*:



□

- Graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci. □
- Jednotkové intervalové* grafy jsou ty mající intervalovou reprezentaci se všemi intervaly délky 1. Jsou to právě ty intervalové grafy bez indukovaného $K_{1,3}$.

Chordální grafy

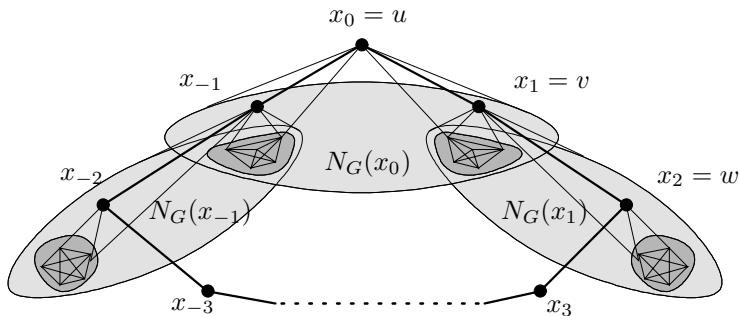
Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje *indukovanou* kružnici delší než tři. \square

Věta 9.2. Každý chordální graf G obsahuje *simpliciální* vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří *kliku* v G . \square

Důkaz: Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu G .

Řekneme, že graf H je *bisimpliciální*, pokud H je úplný nebo H obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy.

1. Pro každou kružnici C a hranu e v G existuje hrana f taková, že $C \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník. \square
2. Necht uv je hranou G a sousedé v tvoří (indukují) bisimpliciální podgraf. Pokud v je simpliciální mezi sousedy u , ale ne v celém G , pak existuje vrchol w spojený s v a nespojený s u takový, že w je simpliciální mezi sousedy v .
3. Pokud G není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak G obsahuje kružnici C odporující bodu 1.
4. Tudíž G je bisimpliciální.



\square

Přímým důsledkem Věty 9.2 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu; jedná se o seřazení jeho vrcholů do posloupnosti v_1, v_2, \dots, v_n tak, že každé v_i , $i = 2, \dots, n$, je simpliciální v podgrafu indukovaném na v_1, \dots, v_{i-1} .

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů. \square

Věta 9.3. *Graf G je chordální právě když G je průnikovým grafem podstromů ve vhodném stromě.* \square

Důkaz (náznak): Povedeme indukci podle počtu vrcholů G . Báze pro jeden vrchol je zřejmá. Navíc zřejmě každý průnikový graf podstromů v nějakém stromě musí být chordální.

Jinak necht' v je simpliciální vrchol chordálního grafu G . Indukcí sestrojíme průnikovou reprezentaci také chordálního grafu $G - v$. Pak sousedé v tvoří kliku, tudíž v průnikové reprezentaci grafu $G - v$ se v některém uzlu stromu všichni překrývají. Na tomto místě přidáme nový list stromu, který bude reprezentovat v a bude překryt reprezentanty sousedů v . \square

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu. □
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici. □
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici. □
- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC). □
- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi. □
- *Dotykové* ... grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.

Věta 9.4. *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.* □

- Jiné, tzv. *viditelnostní* grafy nejsou definovány průniky objektů, ale jejich vzájemnou viditelností v geometrickém světě.

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Nitovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.5. *Každý rovinný graf je nitový.* □

Tvrzení 9.6. *Existují grafy, které jsou nitové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.* □

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání nitových grafů velmi algoritmicky náročné. Vzhledem k Tvrzení 9.6 je mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy \mathcal{NP} , než jeho těžkost, [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.7. *Problém rozpoznat, zda daný graf je nitový, je \mathcal{NP} -úplný.* □

Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je \mathcal{NP} -těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy \mathcal{NP} zůstává otevřená kvůli následujícímu.

Tvrzení 9.8. *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.* □

Hypotéza 9.9. Je každý rovinný graf úsečkovým grafem?

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotkových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotkové grafy úseček* v rovině:

Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.

(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)

Věta 9.10. *Graf je dotkovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.* □

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů [PH].

Věta 9.11. *Problém rozpoznat dotkový graf úseček je \mathcal{NP} -úplný.* □

U „zápalkových“ grafů je možno dále zkoumat několik dodatečných omezení.

- Povolíme „oboustranné“ dotky úseček, nebo *jen jednostranné*? □
- Kolika úsečkám dovolíme dotyk v jednom bodě? → *k-dotkové grafy* □
- Co když zobecníme úsečky na obyčejné křivky v rovině?

Dá se ukázat, že třídy dotkových grafů popsané předchozími body jsou různé a obtížnost jejich rozpoznání zůstává, až na triviální případy. . .